

COMPETENCIA MATEMÁTICA-N3

María del Carmen Montañez Rodríguez

2.ª edición

Muestra gratuita

IDEASPROPIAS
editorial

IDEASPROPIAS

editorial

 Compra este libro



Muestra gratuita

COMPETENCIA MATEMÁTICA-N3

No está permitida la reproducción total o parcial de este libro, ni su tratamiento informático, ni la transmisión de ninguna forma o por cualquier medio, ya sea electrónico, mecánico, por fotocopia, por registro u otros métodos, sin el permiso previo y por escrito de los titulares del Copyright.

DERECHOS RESERVADOS 2015, respecto a la segunda edición en español, por

© Ideaspropias Editorial.

ISBN: 978-84-9839-556-3

Depósito legal: VG 74-2015

Autora: María del Carmen Montañez Rodríguez

Formato: 21 x 29,7 cm

Páginas: 170

Impreso en España

Ideaspropias Editorial ha incorporado en la elaboración de este material didáctico citas y referencias de obras divulgadas y ha cumplido todos los requisitos establecidos por la Ley de Propiedad Intelectual. Por los posibles errores y omisiones, se excusa previamente y está dispuesta a introducir las correcciones pertinentes en próximas ediciones y reimpresiones.

Muestra gratuita

Matemáticas

Muestra gratuita

Matemáticas

N3

Índice

1.

Utilización de los números para la resolución de problemas	006
1.1. Introducción	008
1.2. Números naturales	008
1.2.1. Descomposición de un número natural en factores primos	009
1.2.2. Máximo común divisor y mínimo común múltiplo	009
1.3. Números enteros	011
1.3.1. Representación de los números enteros	011
1.3.2. Operaciones con números enteros	011
1.3.3. Uso del paréntesis y de las reglas de prioridad de las operaciones	014
1.4. Fracciones y decimales en entornos cotidianos	015
1.4.1. Significados y usos de las fracciones	015
1.4.2. Representación gráfica de las fracciones	016
1.4.3. Ordenación de fracciones	017
1.4.4. Operaciones con fracciones	018
1.5. Potencias y raíces cuadradas	020
1.5.1. Operaciones con potencias	020
1.5.2. Cálculo de potencias de base 10	022
1.5.3. Operaciones con raíces cuadradas	022
1.6. La proporcionalidad	025
1.6.1. Cálculo de la proporcionalidad directa. Resolución de problemas	025
1.6.2. Cálculo de la proporcionalidad inversa. Resolución de problemas	026
1.6.3. Cálculo del tanto por ciento y tanto por uno	030
1.6.4. Utilización de los porcentajes en la economía. Interés simple. Descuentos. Impuestos (IVA)	031
1.7. Utilización de la calculadora	033
1.7.1. Instrucciones de manejo de la calculadora científica	033
1.7.2. Empleo de la calculadora como un instrumento para resolver operaciones	034
RESUMEN	035
COMPRUEBA LO QUE HAS APRENDIDO	036
SOLUCIONES	038

2.

Utilización de las medidas para la resolución de problemas	040
2.1. Introducción	042
2.2. El sistema métrico decimal	042
2.2.1. Medidas de longitud. El metro, múltiplos y submúltiplos	043
2.2.2. Medidas de superficie. El metro cuadrado	045
2.2.3. Medidas de volumen. El metro cúbico	046

2.2.4. Medidas de capacidad y masa. El litro y el kilogramo	048
2.2.5. Relación entre medidas de capacidad y volumen	051
2.2.6. Comparación y utilización del litro y el decímetro cúbico	051
2.2.7. Estimación de medidas: el palmo, el pie, el paso, el dedo, el brazo, las losas del suelo, el tablero de la mesa, etc.	051
2.2.8. Resolución de problemas utilizando las unidades del sistema métrico decimal	053
2.3. Ángulos	056
2.3.1. Medidas de ángulos	056
2.3.2. Clases de ángulos	059
2.3.3. Resolución de problemas sobre ángulos	061
RESUMEN	063
COMPRUEBA LO QUE HAS APRENDIDO	064
SOLUCIONES	066
Aplicación de la geometría en la resolución de problemas	068
3.1. Introducción	070
3.2. Triángulos rectángulos	070
3.2.1. Significado y cálculo del teorema de Pitágoras	072
3.2.2. Aplicación del teorema de Pitágoras a la resolución de problemas	073
3.3. Polígonos	076
3.3.1. Propiedades y relaciones	076
3.3.2. Significado y cálculo de perímetros y áreas	078
3.3.3. Clasificación de polígonos	081
3.3.4. Utilización de perímetros y áreas en la resolución de problemas del entorno	082
3.4. La circunferencia y el círculo	085
3.4.1. Cálculo de la longitud de la circunferencia aplicado a la resolución de problemas	087
3.4.2. Cálculo del área del círculo aplicado a la resolución de problemas	087
3.5. Cuerpos geométricos: prismas y pirámides	088
3.5.1. Cálculo del área y volumen del prisma	089
3.5.2. Cálculo del área y volumen de la pirámide	090
3.6. Cuerpos geométricos: cilindros, conos y esfera	092
3.6.1. Cálculo del área y volumen del cilindro	092
3.6.2. Cálculo del área y volumen del cono	093
3.6.3. Cálculo del área y volumen de la esfera	094

3.

3.7. Resolución de problemas geométricos que impliquen la estimación y el cálculo de longitudes, superficies y volúmenes	095
RESUMEN	097
COMPRUEBA LO QUE HAS APRENDIDO	098
SOLUCIONES	100

4.

Aplicación del álgebra en la resolución de problemas	102
4.1. Introducción	104
4.2. Situaciones de cambio	104
4.2.1. Traducción de expresiones del lenguaje cotidiano al algebraico	104
4.2.2. Empleo de letras para simbolizar números desconocidos	106
4.2.3. Representación gráfica	115
4.2.4. Sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas	118
4.2.5. Traducción al sistema algebraico de situaciones con dos incógnitas	122
4.2.6. Resolución de problemas con sistemas de ecuaciones	123
4.2.7. Representación gráfica	128
4.3. Valoración de la precisión del lenguaje algebraico para representar y comunicar situaciones de la vida cotidiana	130
4.3.1. Uso de las letras para representar cantidades	130
4.3.2. Empleo de los símbolos para representar relaciones numéricas	131
RESUMEN	133
COMPRUEBA LO QUE HAS APRENDIDO	134
SOLUCIONES	136

5.

Aplicación de la estadística y la probabilidad en la resolución de problemas	138
5.1. Introducción	140
5.2. Organización en tablas de los datos recogidos en una experiencia	140
5.2.1. Diferenciación entre población y muestra	140
5.2.2. Cálculo de frecuencia absoluta y relativa	141
5.2.3. Representación gráfica de los datos en tablas	143
5.2.4. Expresión de los datos en diagramas: de barras y sectores	147
5.2.5. Medidas de centralización: media, mediana y moda	150
5.2.6. Parámetros de dispersión: rango y desviación típica	154
5.3. Experimentos aleatorios	158
5.3.1. Comportamiento del azar	158
5.3.2. Realización de experimentos con dados y monedas	159
5.3.3. Cálculo de frecuencia y probabilidad de un suceso	160

1.

Utilización de los números para la resolución de problemas



Contenidos



1. Utilización de los números para la resolución de problemas
 - 1.1. Introducción
 - 1.2. Números naturales
 - 1.3. Números enteros
 - 1.4. Fracciones y decimales en entornos cotidianos
 - 1.5. Potencias y raíces cuadradas
 - 1.6. La proporcionalidad
 - 1.7. Utilización de la calculadora

Objetivos

- Realizar operaciones con números racionales e irracionales y utilizarlas para resolver problemas de la vida cotidiana, empleando las propiedades más importantes, aplicando con seguridad a una amplia variedad de contextos de la vida cotidiana el modo de cálculo más adecuado, ajustando a la situación planteada la forma de expresar los números (decimal, fraccionaria o en notación científica) y verificando la precisión de los resultados obtenidos.
- Poner en práctica métodos adecuados de resolución de problemas sobre proporcionalidad que se producen en distintos contextos del entorno diario o en situaciones financieras habituales, empleando procedimientos acordes a la situación planteada (regla de tres simple y compuesta, porcentajes, interés simple y compuesto), valorando la utilización de tecnologías de la información para realizar los cálculos cuando proceda.

Muestra gratuita



Reflexión inicial

En la rutina del día a día se presentan múltiples situaciones o circunstancias que requieren un conocimiento mínimo de las matemáticas. En esta unidad didáctica se mostrarán los cimientos de las matemáticas orientadas a la resolución de problemas cotidianos y casos prácticos habituales.



Introducción

1.1.

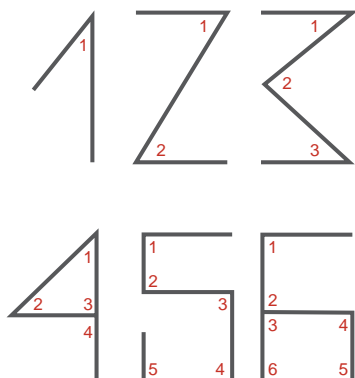
En esta unidad didáctica se estudiarán una serie de operaciones con números racionales e irracionales que serán de mucha utilidad para la resolución de problemas de la vida cotidiana. Se tratarán aplicaciones que se pueden ajustar a varios contextos habituales, de tal manera que al finalizar, los alumnos dispongan de las herramientas suficientes para saber distinguir cuál se adapta mejor a la resolución del problema en cuestión, obteniendo resultados correctos y precisos.

Las operaciones que se tratarán en esta unidad didáctica son, entre otras, la potenciación, la radicación y la resolución de problemas de proporcionalidad directa e inversa.

Se pueden encontrar ejemplos de aplicación práctica de estos cálculos en el uso de la proporcionalidad y los porcentajes para el cómputo de intereses bancarios o impuestos como el IVA (Impuesto sobre el Valor Añadido).

?? ¿Sabías que...?

El origen de la forma de los números coincide con la cantidad de ángulos que poseen.



Números naturales

1.2.

El conjunto de los **números naturales** (\mathbb{N}) es el primero en aparecer en cualquier circunstancia del día a día, derivado de la necesidad del ser humano de contar. Este conjunto de números está compuesto por:

$$\mathbb{N} = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \dots \}$$

Es un conjunto ilimitado, ya que tiene infinitos términos. Los números naturales comienzan desde el 0 en adelante, sin términos medios o decimales. Estos números se suelen usar para contar los elementos de una sucesión o conjunto, de modo que se asimile fácilmente la unidad respecto a la totalidad de algo.

Así, los números naturales se dividen especialmente en números ordinales y números cardinales, bien mostrando el orden de una serie o bien el tamaño de algo que tiene un fin.

Un número natural se puede clasificar en primo o compuesto, dependiendo de sus divisores. Un número es primo si solo se puede dividir entre sí mismo y la unidad mientras que un número natural será compuesto si tiene como divisores uno o más números distintos de él mismo y la unidad.



1.2.1. Descomposición de un número natural en factores primos

La condición para poder descomponer un número en factores primos es que dicho número sea compuesto, entendiendo por número compuesto aquel que tiene un divisor o más, distintos de él mismo y la unidad.

La **descomposición** de un número natural será el producto de los números primos así obtenidos.

Entonces, para poder descomponer un número en factores primos se utilizarán sus divisores. A fin de que esta descomposición sea máxima, se tendrán que usar los divisores que sean números primos.

Se empieza por dividir el número que se va a descomponer entre el más pequeño de sus divisores primos. Con el cociente obtenido se hará la misma operación, esto es, la búsqueda del menor número divisible entre él y así sucesivamente hasta que el número resultante sea 1.

En la práctica, para descomponer un número natural en factores primos se divide de forma ordenada entre los números primos tantas veces como sea posible y así sucesivamente hasta obtener 1 de cociente. En la siguiente tabla, se muestra una descomposición del número 352 en factores primos:

	352	2
$352 : 2 = 176$	176	2
$176 : 2 = 88$	88	2
$88 : 2 = 44$	44	2
$44 : 2 = 22$	22	2
$22 : 2 = 11$	11	11
$11 : 11 = 1$	1	
$352 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 11 = 2^5 \cdot 11$		

Vocabulario

Número primo: aquel número que solo tiene como divisores él mismo y la unidad.

Consulta

Busca información acerca de la relación existente entre los números primos y el libro *El curioso incidente del perro a medianoche*.

1.2.2. Máximo común divisor y mínimo común múltiplo

Dos de los cálculos matemáticos fundamentales para hallar otro tipo de operaciones son el m.c.m (mínimo común múltiplo) y el m.c.d (máximo común divisor).

Por una parte, el **m.c.m** es el número natural más pequeño que es múltiplo de todos los números de una serie.

Por otra parte, el **m.c.d** de dos o más números enteros será el mayor número que los divida sin dejar resto, es decir, el mayor divisor natural aplicable a todos los números de la serie.

En el caso de que dos números sean primos, el m.c.m será el resultado de la multiplicación entre ambos, mientras que en el m.c.d los números a descomponer serán primos cuando no se halle ningún número o factor común entre ellos.

Para calcular el m.c.m y el m.c.d de una serie de números debe seguirse un procedimiento con una serie de pasos que se detallarán a continuación:

- 1.º Realizar la descomposición factorial de los números dados.
- 2.º Efectuar el producto de los factores comunes a todos los números y que tengan el menor exponente. El resultado de esa multiplicación será el m.c.d buscado.



Importante

Tanto el m.c.m como el m.c.d se descomponen en factores primos.

En el m.c.m serán los factores primos elevados a la menor potencia, mientras que en el m.c.d serán los comunes y no comunes elevados a la mayor potencia.

?? ¿Sabías que...?

En el año 1961, el matemático Andrés Zavrotsky inventó un aparato que calcula el m.c.d de dos números enteros a través de la emisión de un haz de luz.

Para calcular el m.c.d de 18 y 60, en primer lugar se realiza la descomposición factorial de 18 y 60:

18	2	60	2
9	3	30	2
3	3	15	3
1		5	5
			1

En segundo lugar, se efectúa el producto de los factores comunes a 18 y 60 que tengan el menor exponente: $18 = 2 \cdot 3^2$; $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$.

Los factores comunes de menor exponente son 2 y 3.

Para calcular el m.c.m de 18, 20 y 72, al igual que para el m.c.d, se efectúa la descomposición factorial de los números dados tal y como se muestra en la siguiente tabla:

18	2	20	2	72	2
9	3	10	2	36	2
3	3	5	5	18	2
1				9	3
				3	3
					1

A continuación se calcula el producto de los factores comunes y no comunes de mayor exponente, obteniendo así el m.c.m de dichos números:

$$18 = 2 \cdot 3^2$$

$$20 = 2^2 \cdot 5$$

$$72 = 2^3 \cdot 3^2$$

Seguidamente se efectúa el producto de los factores comunes y no comunes de mayor exponente:

$$18 = 2 \cdot 3^2$$

$$20 = 2^2 \cdot 5$$

$$72 = 2^3 \cdot 3^2$$

El factor común a los tres números es el 2 y el de mayor exponente es 2^3 . Los factores no comunes de mayor exponente son: 3^2 y 5, resultando ser además los únicos factores no comunes.

Por último, se multiplican esos factores a fin de obtener así el número más pequeño (mínimo) que es múltiplo de 18, 20 y 72, es decir, el mínimo común múltiplo:

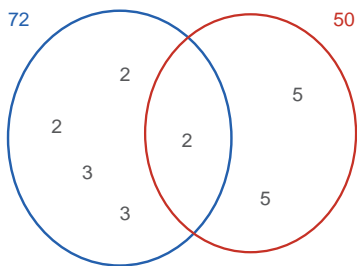
$$m.c.m (18, 20, 72) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 = 360$$

Tal y como se ha comprobado, el cálculo tanto del m.c.m como del m.c.d son de sencilla aplicación pero, además, resultan también de gran utilidad.

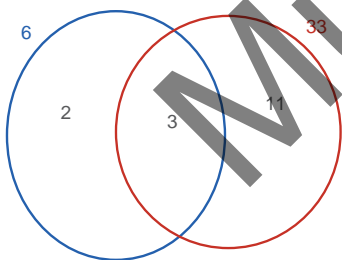
Así, realizando estos cálculos se puede agilizar mucho la búsqueda o estimación de otras incógnitas. Pues bien, el cálculo del m.c.m y del m.c.d se puede aplicar en problemas o estimaciones en las que se puedan relacionar diferentes cifras o magnitudes para sacar una correlación matemática.

?? ¿Sabías que...?

Una manera gráfica de representar el m.c.m y el m.c.d es la siguiente:
m.c.m de 72 y 50:



m.c.d de 6 y 33:



1.3. Números enteros

El conjunto de los **números enteros** (\mathbb{Z}) incluye los números naturales y sus negativos. Al igual que el conjunto de los números naturales, el conjunto de los números enteros es ilimitado.

Los números enteros no poseen expresión decimal pero sí valores tanto negativos como positivos. Los enteros negativos suelen expresarse con el signo negativo (–) antes del número, mientras que los positivos también pueden ir acompañados por el signo correspondiente (+), aunque en este caso se suele omitir.

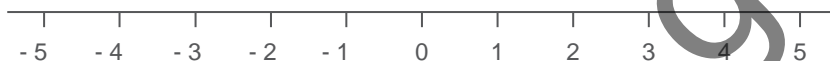
En esta unidad didáctica se aprenderá a representar estos números en una recta y las operaciones que se pueden realizar con ellos.

1.3.1. Representación de los números enteros

Los números naturales, sus opuestos y el cero forman un nuevo conjunto de números denominado números enteros (\mathbb{Z}).

$$\mathbb{Z} = \{ \dots -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5 \dots \}$$

Los números enteros se representan en una recta. El primero que se sitúa es el cero, que es el origen de la recta. Hacia la derecha del cero se sitúan los números positivos y hacia la izquierda los negativos.



Los números negativos se representan con el signo menos delante (–1, –2, –3, etc.) y los positivos se pueden representar precedidos por un signo positivo (+1, +2, +3, etc.) o simplemente con el número prescindiendo del signo (1, 2, 3, etc.).

Al comparar dos números enteros será mayor el que se encuentre más hacia la derecha. El cero es mayor que cualquier número negativo y menor que cualquiera positivo.

El **valor absoluto** de un número entero es el que resulta de prescindir del signo. Se representa entre barras verticales. El valor absoluto de –3 es 3 y el de +3 es también 3. Se expresa como: $|-3| = 3$ y $|+3| = 3$.

1.3.2. Operaciones con números enteros

Las **operaciones con números enteros** son: suma, resta, multiplicación, división, potenciación y radicación.

Para **sumar** números enteros con el mismo signo se suman los valores absolutos de ambos y se pone delante el signo que tenían los sumandos. Esta regla atiende a la ley conmutativa de las matemáticas, ya que al alterar el orden de los factores de los sumandos no variará el resultado final, al tratarse de valores con el mismo signo.

$$(+2) + (+23) = +25$$

$$(-6) + (-8) = -14$$

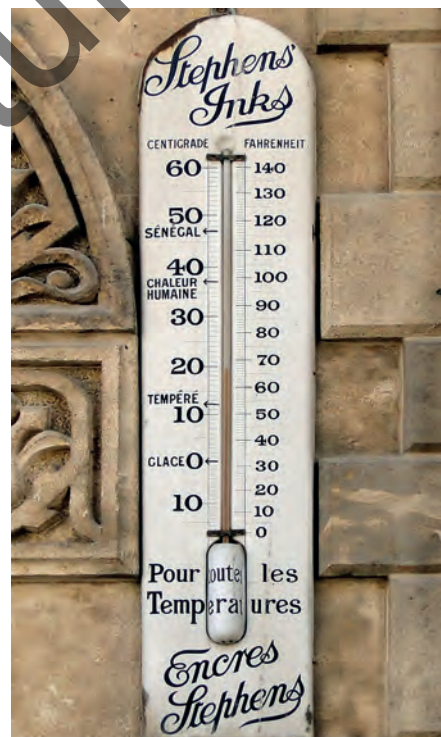
Tal y como se ha comprobado con estas dos operaciones, la suma entre números positivos o negativos entre sí siempre dará un resultado de igual signo.

Ejemplo

Algunas cuestiones cotidianas en las que se utilizan los números enteros son:

Para medir la temperatura: -4° , -2° , 0° , 1° , 26° , etc.

Para las plantas de un edificio: -2 , -1 , 0 (planta baja), 1 , 2 , 3 , etc.



Consulta

Los números enteros se representan con la letra (\mathbb{Z}) por su procedencia del término alemán «zahl» que significa número.

Para sumar números enteros con distinto signo se restan los valores absolutos y se pone en el resultado el signo del mayor. De este modo se evitan confusiones acerca del valor del resultado final en operaciones con factores tanto negativos como positivos.

$$(-2) + (+13) = +11$$

$$(+15) + (-30) = -15$$

Las **propiedades de la suma** de números enteros son: propiedad conmutativa, propiedad asociativa, elemento neutro, elemento opuesto y propiedad interna.

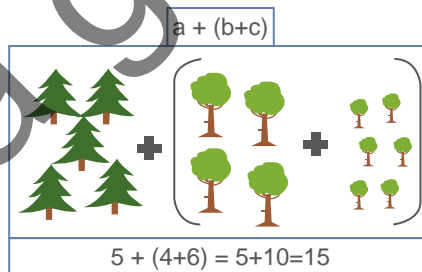
Mediante la propiedad conmutativa, como ya se ha explicado, el orden de los sumandos no altera el resultado de la suma: $(+15) + (-3) = (-3) + (+15) = +12$.

En cuanto a la propiedad asociativa, se pueden agrupar los sumandos como se desee sin que ello afecte al resultado. Para aplicar esta propiedad, como es obvio, tienen que darse al menos tres sumandos. El empleo de esta propiedad consistirán en la realización de dos sumandos primeramente para simplificar la operación y realizar una última suma.

$$((+12) + (-2)) + (-1) = (+12) + ((-2) + (-1))$$

$$(+10) + (-1) = (+12) + (-3)$$

$$(+9) = (+9)$$



Otra propiedad es el elemento neutro de los números enteros, que es el 0. Todo número entero sumado con el 0 es el mismo número: $(+5) + (0) = (+5)$.

El elemento opuesto determina que la suma de dos números enteros opuestos es 0. Esto sucede debido a que el número coincide, por lo que lo único que cambia es el valor de los sumandos: $(+5) + (-5) = (0)$.

La propiedad interna de la suma dispone que la suma de dos números enteros es otro número entero.

$$(+5) + (-3) = (+2) \in \mathbb{Z}$$

En cuanto a la **resta**, para restar números enteros se suma al minuendo el opuesto del sustraendo, tal y como se muestra en los siguientes ejemplos:

$$(+2) - (-7) = (+2) + (+7) = +9$$

$$(-4) - (+8) = (-4) + (-8) = -12$$

Por su parte, las **propiedades de la resta** de números enteros son la propiedad no conmutativa y la propiedad interna. La propiedad no conmutativa, como su propio nombre indica, actúa de modo opuesto a la conmutativa ya que el orden de los términos sí altera el resultado.

$$(+10) - (-1) \neq (-1) - (+10)$$

?? ¿Sabías que...?

Los signos matemáticos + y - aparecieron como tal por primera vez en 1489, en el libro de aritmética comercial del matemático alemán Johannes Widman.

En cualquier caso, quien popularizó su uso sería también un alemán, Michael Stifel.



Vocabulario

Minuendo: en restas, cantidad a la que se le debe restar otra.

Sustraendo: en restas, cantidad que se le ha de restar al minuendo.

En cuanto a la propiedad interna de la resta, esta fija que la resta de dos números enteros sea siempre otro número entero. Así, la resta de números enteros nunca dará lugar a un resultado racional o decimal.

$$(+5) - (-3) = (+8) \in \mathbb{Z}$$

El resultado de la **multiplicación** de números enteros es el producto del valor absoluto de los números, precedido del signo que le corresponda según las siguientes reglas matemáticas.

Cuando los factores son todos positivos el resultado será positivo, cuando son negativos el resultado será de igual modo, mientras que cuando los factores sean de diferente signo el resultado será siempre negativo.

Las **propiedades de la multiplicación** de números enteros son: propiedad interna, propiedad conmutativa, propiedad asociativa, elemento neutro, propiedad distributiva y sacar factor común.

La propiedad interna hace referencia a que el producto de dos números enteros siempre da como resultado otro número entero.

$$(-1) \cdot (+4) \in \mathbb{Z}$$

La propiedad conmutativa se vuelve a repetir en la multiplicación, pues el orden de los factores en este caso tampoco altera el producto.

$$(-9) \cdot (+2) = (+2) \cdot (-9)$$

La propiedad asociativa establece que la forma de agrupar los factores no altera el resultado del producto. Se muestra a continuación, un ejemplo de tres multiplicaciones equivalentes asociadas o reducidas a diferentes niveles pero con mismo resultado.

$$\begin{aligned} ((-2) \cdot (-7)) \cdot (+4) &= (-2) \cdot ((-7) \cdot (+4)) \\ (+14) \cdot (+4) &= (-2) \cdot (-28) \\ (+56) &= (+56) \end{aligned}$$

El elemento neutro del producto es el 1. Un número entero multiplicado por 1 da como resultado el mismo número.

$$(-2) \cdot 1 = -2$$

La propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma resuelve que el producto de un número entero por una suma es igual a la suma del producto de cada uno de los sumandos por dicho número.

En el siguiente ejemplo se multiplica primero el -2 por el primer sumando $(+1)$ y luego por el segundo $(+3)$, para posteriormente hacer la suma de los productos resultantes (-2) y (-6) .

$$(-2) \cdot (1 + 3) = (-2) + (-6) = -8$$

Sacar factor común es lo contrario de la propiedad distributiva. Se identifica el número de sumandos y los factores que sean iguales a todos ellos se sacan como factor común.

$$(-2) \cdot 3 + (-2) \cdot (-5) = (-2) \cdot (3 + (-5)) = (-2) \cdot (3 - 5)$$

De este modo, se está identificando el número común a varias cifras para poder simplificar la operación.

Ejemplo

Multiplicaciones ya resueltas según las reglas establecidas para los valores de los factores:

$$(+1) \cdot (+1) = (+1), (+2) \cdot (+3) = (+6)$$

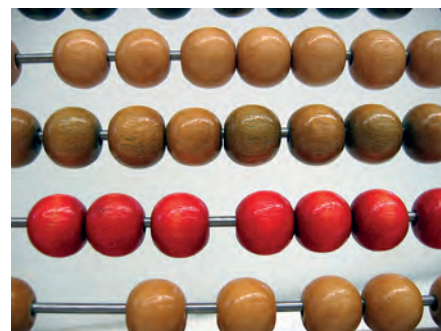
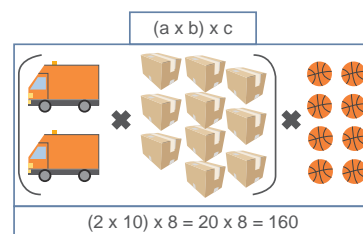
$$(-1) \cdot (-1) = (+1), (-2) \cdot (-7) = (+14)$$

$$(+1) \cdot (-1) = (-1), (+5) \cdot (-3) = (-15)$$

$$(-1) \cdot (+1) = (-1), (-4) \cdot (+6) = (-24)$$

Ejemplo

Propiedad asociativa de la multiplicación:



 **Ejemplo**

Divisiones ya resueltas según las reglas establecidas para los valores de los factores:

$$(+): (+) = (+), (+15) : (+3) = (+5) = 5$$

$$(-): (-) = (+), (-12) : (-2) = (+6) = 6$$

$$(+): (-) = (-), (+24) : (-6) = (-4) = -4$$

$$(-): (+) = (-), (-21) : (+7) = (-3) = -3$$

El resultado de la **división** de números enteros es el cociente del valor absoluto de los números precedido del signo que le corresponda. Los signos siguen las mismas reglas que en el producto.

Las **propiedades de la división** de números enteros son: propiedad no interna y propiedad no conmutativa. La propiedad no interna designa que el cociente de dos números enteros no siempre da como resultado otro número entero.

$$(-2) : (+3) \notin \mathbb{Z}$$

La propiedad no conmutativa de la división determina que si se intercambian dividendo y divisor el resultado no es el mismo. Así pues, la propiedad no conmutativa es opuesta a la conmutativa, por lo tanto la división y la multiplicación también lo son.

$$(-21) : (+7) \neq (+7) : (-21)$$

Uso del paréntesis y de las reglas de prioridad de las operaciones

1.3.3.

Cuando se realizan operaciones en las que aparecen ejercicios combinados es necesario utilizar una serie de reglas para que el resultado sea correcto. Si en la expresión se incluyen **paréntesis**, se puede actuar de dos maneras.

Lo primero que hay que hacer es quitar el paréntesis, sin operar previamente. Para ello solo se tendrá en cuenta el signo que hay delante del paréntesis: si este es positivo, lo de dentro del paréntesis no cambia de signo y si el signo es negativo, para quitar el paréntesis se modifican todos los operandos de signo.

En lo referente a las **reglas de prioridad** de las operaciones, una vez eliminados los paréntesis, la prioridad o jerarquía es la siguiente:

- 1.º Se calculan las potencias y raíces.
- 2.º Se efectúan los productos y cocientes antes que las sumas y las restas.

Como ejemplo se toma la siguiente operación, de la cual se tendrán que otorgar un orden o prioridad.

$$10 : 2 + 5 \cdot 3 + 4 - 5 \cdot 2 - 8 + 4 \cdot 2 - 16 : 4$$

En este caso se identifican 7 sumandos:

$$\underline{10 : 2} + \underline{5 \cdot 3} + \underline{4} - \underline{5 \cdot 2} - \underline{8} + \underline{4 \cdot 2} - \underline{16 : 4}$$

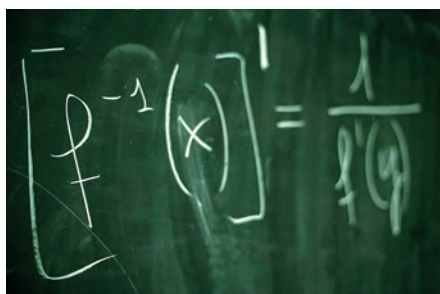
Tras esto, se realizan los productos y cocientes por tener prioridad respecto a las sumas y las restas:

$$5 + 15 + 4 - 10 - 8 + 8 - 4$$

Finalmente se calculan las sumas y restas.

Una de las formas es sumar por un lado todos los positivos y, por otro, todos los negativos para restar luego ambos resultados:

$$32 - 22 = 10$$



 **Ejemplo**

Se presenta la siguiente operación con paréntesis:

$$(-4) - (5 + (-11) + 3) = (-4) - 5 + 11 - 3 = -4 - 5 + 11 - 3 = -12 + 11 = -1$$

Hay que resolver en primer lugar, las operaciones que estén dentro del paréntesis. Una vez realizadas ya se puede quitar el paréntesis sin olvidar el signo que este tenga delante:

$$2 - (3 + (-5) + 8) = 2 - (+6) = 2 - 6 = -4$$

1.4. Fracciones y decimales en entornos cotidianos

Los números fraccionarios se encuentran dentro del conjunto de los **números racionales**, al igual que los números decimales exactos y periódicos, que se pueden expresar en forma de fracción. El resto de los números decimales que no pueden expresarse como fracción forman parte de los **números irracionales**.

Las fracciones se expresan como una división donde el dividendo se denomina numerador (a) y el divisor (b) se llama denominador.

$$\frac{a}{b}$$

Los números decimales tienen una parte entera y otra decimal, separadas ambas por una coma. La parte entera la componen las cifras que se encuentran delante de la coma y la parte decimal, por tanto, las cifras existentes después de la coma. Todos los números decimales se pueden expresar en forma de fracción, salvo aquellos cuya parte decimal es ilimitada y cuyas cifras no se repiten de forma periódica.

A continuación se explicarán algunas utilidades de las fracciones y se estudiará cómo se opera con este tipo de números.

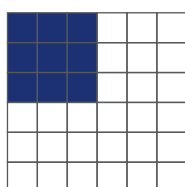
1.4.1. Significados y usos de las fracciones

La idea de **número fraccionario** surge de la necesidad de hacer mediciones donde hay que fragmentar la unidad. Algunas mediciones fraccionarias son la mitad, la quinta parte, la décima parte; muy utilizadas en la vida cotidianas. Estas expresiones se declaran mediante fracciones del tipo $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{10}$.

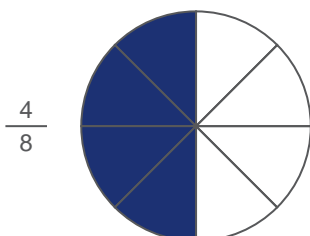
Cuando en la fracción el numerador es menor que el denominador, el número es menor que la unidad. Estas fracciones se denominan fracciones propias. A continuación se muestra un ejemplo:

Partiendo de la fracción $\frac{9}{36}$ se procederá a representar de un modo gráfico las porciones o partes que hacen referencia al numerador.

En esta primera imagen, el numerador (9) representa las porciones coloreadas en azul y el denominador (36) el total.



En la siguiente imagen, el numerador (4) representa las porciones coloreadas en azul y el denominador (8), el total.



?? ¿Sabías que...?

El número Pi (π) es el número irracional más conocido. Como es sabido, este número es infinito y no se puede representar en su valor completo o máximo. Sin embargo, un ciudadano japonés ostenta actualmente el récord del mundo tras haber memorizado 10 000 decimales del número Pi.



! Importante

Los egipcios han resultado de gran relevancia de cara al desarrollo de las matemáticas y, en concreto, de las fracciones. En el papiro de Ahmes (casi 4000 años de antigüedad) ya se empleaban fracciones. Además, hoy en día se conocen las fracciones egipcias como la suma de aquellas fracciones unitarias distintas, es decir, con numerador 1 y denominadores diferentes.

🗨 Vocabulario

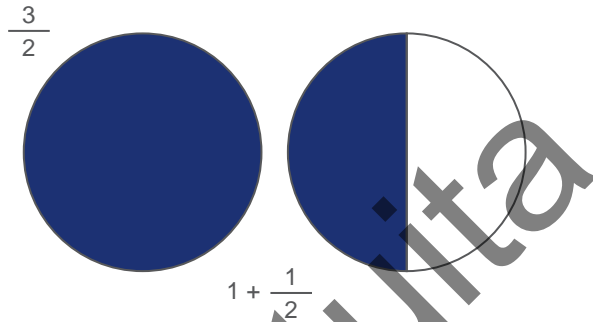
Quebrados: a las fracciones también se las puede denominar de este modo, aunque actualmente se encuentre en desuso.

Ejemplo

La fracción $\frac{3}{2}$ es una fracción impropia que se puede expresar como la suma de la unidad más la fracción $\frac{1}{2}$, es decir:
 $\frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2}$.

Otro tipo de fracciones son aquellas que contienen varias veces la unidad más una fracción de la unidad. Se denominan **fracciones impropias**. Este tipo de fracciones representan un valor unitario adherido a otro valor menor que la unidad, lo cual le otorga una distinción o cantidad adicional de un modo fraccionario o racional.

Gráficamente se necesitan tantas figuras como unidades más una, donde se representa la parte decimal. En el ejemplo hay una unidad, con lo que se necesita una figura que represente la unidad más otra donde se expresa la fracción.



Cuando el numerador es múltiplo del denominador el resultado es un número entero. Todo número entero se puede representar como una fracción:

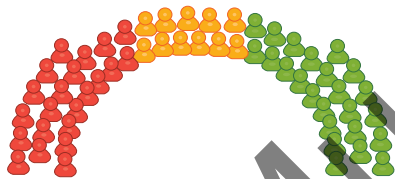
$$\frac{4}{2} = 2 \quad \frac{121}{11} = 11 \quad \frac{-12}{3} = -4$$

Algunos ejemplos de **usos cotidianos** de las fracciones son: pedir medio kg de cerezas en la frutería, llenar tres cuartos de depósito de gasolina o comprar un décimo de lotería.

Ejemplo

Un ejemplo de representación de fracciones y empleo frecuente de estas son las votaciones y sus resultados.

Es el caso de las votaciones en el senado y demás cámaras de representación política.



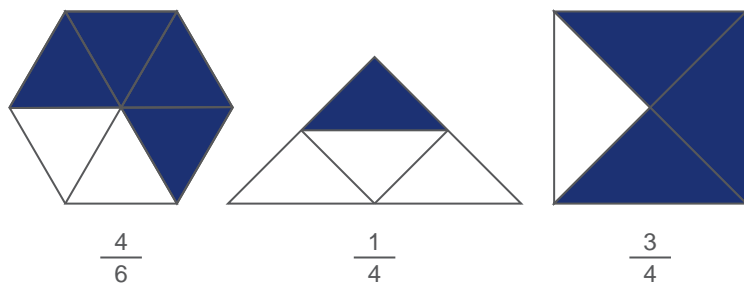
Una forma adecuada para contabilizar los votos y el carácter de cada uno de estos es expresar en forma de fracción la cantidad de cada tipo de voto sobre el total de votantes, que será el denominador.

Representación gráfica de las fracciones

1.4.2.

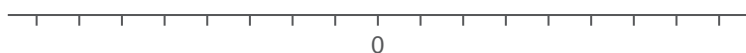
Existen dos formas para **representar gráficamente** las fracciones: realizar una figura geométrica o una recta numérica.

Así pues, una forma es tomar una figura geométrica y dividirla en tantas partes iguales como indique el denominador, coloreando el número de partes que marque el numerador.



Otra manera de representar las fracciones es en la recta numérica, del mismo modo que se hace con los números enteros. Así pues, en la recta ahora hay un nuevo conjunto de números denominados números racionales que se representan por la letra \mathbb{Q} . Los números racionales están formados por los números enteros y los fraccionarios.

A continuación se explica el proceso de representación gráfica de las fracciones, representando los números enteros en la recta numérica. Primero se traza una recta sobre la que se sitúa el cero que es el origen.

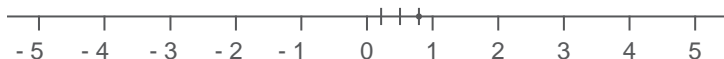




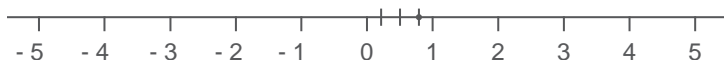
Tras esto, se elige una medida donde se pone el 1 y manteniendo esa distancia se sitúan a la derecha del 0 los positivos y a la izquierda los negativos.



Ahora se amplía la recta representando las fracciones. Para ello, se divide la unidad en tantas partes iguales como indique el denominador.



La fracción $\frac{3}{4}$ indica que la unidad se divide en cuatro partes, tal y como indica el denominador. Se toman tantas partes como indique el numerador, en ese punto se encuentra el número que se quiere representar.



En este caso se toman 3 partes, tal y como indica el numerador de la fracción.

Entre dos números racionales se encuentran infinitos números racionales. Se podría estar situando números en la recta y nunca se llegaría al final, por lo que es imposible averiguar cuál es el anterior o posterior a un número racional.

1.4.3. Ordenación de fracciones

El saber representar los números fraccionarios en la recta ayuda a la hora de **ordenar** y comparar estos números, además de facilitar la asimilación e interpretación del valor o magnitud de dicha fracción.

Una vez situados los números en la recta, estos quedan situados de izquierda a derecha de forma creciente de tal manera que, cuanto más a la derecha se encuentre el número mayor será este. Otra forma de ordenar las fracciones es reduciendo estas a común denominador y comparando numeradores.

Para **reducir fracciones a común denominador** hay que tener en cuenta que, si hay una serie de fracciones con distinto denominador no es posible compararlas para ordenarlas si no es representándolas en la recta ya que, en cada una de ellas la unidad está dividida en un número distinto de partes, por lo que los numeradores no significarán lo mismo en todas.

Es distinto $\frac{3}{4}$ que $\frac{3}{2}$, aunque ambas fracciones tienen el mismo numerador.

En un caso se han tomado 3 partes de 4 (menos de la unidad) y en el otro 3 partes de 2 (más de la unidad). Si se quieren ordenar estas fracciones lo que se hará será poner ambas con el mismo denominador, es decir, reducir a común denominador.

Para reducir a común denominador se llevan a cabo los siguientes pasos:

- 1.º Se calcula el m.c.m de los denominadores para hallar el nuevo denominador.
- 2.º Se hallan los nuevos numeradores. Para ello se divide el m.c.m entre cada denominador y el resultado se multiplica por el numerador que se tenía. Después, solamente se tendrán que comparar los numeradores y ordenarlas.



Ejemplo

Se reducen a común denominador las siguientes fracciones:

$$\frac{1}{3}, \frac{5}{6}, \frac{-7}{2}$$

Se halla el m.c.m de 3, 6 y 2: $(3, 6, 2) = 6$. El número 6 es el nuevo denominador:

$$\frac{\square}{6}, \frac{\square}{6}, \frac{\square}{6}$$

Se hallan los nuevos numeradores:

$$6 : 3 = 2; 2 \cdot 1 = 2$$

$$6 : 6 = 1; 1 \cdot 5 = 5$$

$$6 : 2 = 3; 3 \cdot (-7) = -21$$

$$\frac{2}{6}, \frac{5}{6}, \frac{-21}{6}$$

Una vez que se tienen todas las fracciones con el mismo denominador se ordenan comparando numeradores:

$$\frac{1}{3}, \frac{5}{6}, \frac{-7}{2}$$

$$\frac{2}{6}, \frac{5}{6}, \frac{-21}{6}$$

$$\frac{-21}{6} < \frac{2}{6} < \frac{5}{6}$$

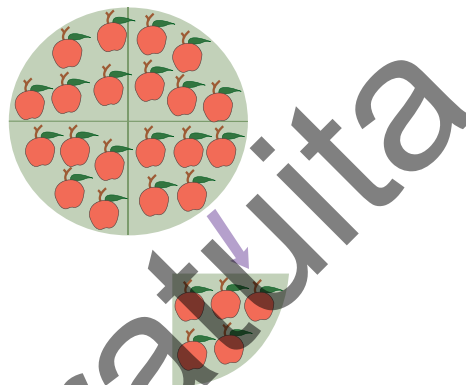
$$\frac{-7}{2} < \frac{1}{3} < \frac{5}{6}$$

Las operaciones que se pueden realizar con los números fraccionarios son las mismas que con los números enteros: suma, resta, multiplicación, división, potenciación y radicación. Estas dos últimas se tratarán en el epígrafe siguiente.

La condición suficiente y necesaria para realizar la **suma y resta de fracciones** es que tengan el mismo denominador, ya que lo que se pretende hacer es la suma de las partes sobre un total. Para sumar o restar fracciones se llevan a cabo los siguientes pasos:

?? ¿Sabías que...?

En la antigua China ya se empleaban y operaban las fracciones reduciéndolas a común denominador. Además, los chinos empleaban los decimales como recurso en las operaciones con fracciones.



- 1.º Se reducen las fracciones a común denominador.
- 2.º Se suman o se restan los numeradores.

A continuación se muestra un ejemplo de una operación de suma y resta de fracciones y el correspondiente proceso para realizarlas:

En primer lugar, se hallan los m.c.m de 2, 4 y 12 para fijar el denominador	$2, 4 = 2^2, 12 = 2^2 \cdot 3, \text{m.c.m}(2, 4, 12) = 2^2 \cdot 3 = 12$
En segundo lugar, al tener el nuevo denominador se hallan los numeradores	$12 : 2 = 6; 6 \cdot 3 = 18$
	$12 : 4 = 3; 3 \cdot 6 = 18$
Por último se operan los numeradores	$12 : 12 = 1; 1 \cdot (-7) = -7$
	$\frac{3}{2} + \frac{6}{4} - \frac{7}{12} = \frac{18}{12} + \frac{18}{12} - \frac{7}{12}$
	$\frac{3}{2} + \frac{6}{4} - \frac{7}{12} = \frac{18}{12} + \frac{18}{12} - \frac{7}{12} = \frac{18 + 18 - 7}{12} = \frac{29}{12}$

$$\frac{3}{2} + \frac{6}{4} - \frac{7}{12} = \frac{18}{12} + \frac{18}{12} - \frac{7}{12} = \frac{18 + 18 - 7}{12} = \frac{29}{12}$$

Para hallar la fracción opuesta a una fracción hay que cambiar el signo de la misma. Por ejemplo, la fracción opuesta a $\frac{1}{5}$ es $\frac{-1}{5} = \frac{1}{-5} = -\frac{1}{5}$. Las tres formas de expresar esta fracción son igualmente válidas por ser fracciones equivalentes, es decir, representan el mismo número.

Es importante saber que la suma de dos fracciones opuestas siempre será 0, igual que sucede con cualquier número o factor.

$$\frac{1}{5} + \left(-\frac{1}{5}\right) = \frac{1}{5} - \frac{1}{5} = \frac{1-1}{5} = \frac{0}{5} = 0$$



El **producto o multiplicación de fracciones** se realiza en línea, multiplicando numeradores entre sí y denominadores del mismo modo.

La fracción de una fracción es igual al producto de ambas fracciones. Así, habrá que multiplicar también los numeradores por los numeradores y los denominadores por los denominadores.

$$\frac{2}{3} \text{ de } \frac{1}{2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2 \cdot 1}{3 \cdot 2} = \frac{2}{6}$$

Las fracciones inversas son aquellas cuyo producto es 1.

$$\frac{3}{5} \cdot \frac{5}{3} = \frac{3 \cdot 5}{5 \cdot 3} = \frac{15}{15} = 1$$

Para **dividir fracciones** se utilizan los productos cruzados. El numerador de la primera fracción por el denominador de la segunda da el numerador del cociente. El denominador de la primera por el numerador de la segunda da como resultado el denominador de la división.

$$\frac{1}{2} \div \frac{3}{4} = \frac{1 \cdot 4}{2 \cdot 3} = \frac{4}{6}$$

$$\frac{1}{2} \div \frac{3}{4} = \frac{1 \cdot 4}{2 \cdot 3} = \frac{4}{6}$$

Si para dividir se colocan las fracciones en forma de una única fracción, se puede realizar la división multiplicando los extremos, que pasan a ser el numerador y los medios que serán el denominador de la división.

Para realizar **operaciones combinadas con fracciones** hay que utilizar las mismas reglas que en los números enteros respecto a los paréntesis y a la prioridad de las operaciones:

$$\left[\left(\frac{2}{3} - \frac{7}{12} \right) : 5 + \frac{1}{3} \right] \cdot 2$$

En primer lugar se comienza realizando las operaciones que hay dentro del corchete ya que tienen prioridad.

! Importante

Se ha de tener en cuenta que si uno de los factores es un número entero, este se pondrá como una fracción de denominador 1:

$$\frac{2}{3} \cdot 5 = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{1} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 1} = \frac{10}{3}$$

! Importante

La relación de las bases con los exponentes y la potencia resultante se muestra en la siguiente tabla.

Base	Expnte.	Potencia
Positiva	Par	Positiva
Positiva	Impar	Positiva
Negativa	Par	Positiva
Negativa	Impar	Negativa

Primero se opera el paréntesis

$$\left(\frac{2}{3} - \frac{7}{12} \right) = \frac{8}{12} - \frac{7}{12} = \frac{8-7}{12} = \frac{1}{12}$$

Se calcula la división

$$\left(\frac{2}{3} - \frac{7}{12} \right) : 5 = \frac{1}{12} : 5 = \frac{1}{12} : \frac{5}{1} = \frac{1 \cdot 1}{12 \cdot 5} = \frac{1}{60}$$

Después se realiza la suma

$$\left(\frac{2}{3} - \frac{7}{12} \right) : 5 + \frac{1}{3} = \frac{1}{12} : 5 + \frac{1}{3} = \frac{1}{60} + \frac{1}{3} = \frac{1}{60} + \frac{20}{60} = \frac{1+20}{60} = \frac{21}{60}$$

Por último, se multiplica por 2

$$\left[\left(\frac{2}{3} - \frac{7}{12} \right) : 5 + \frac{1}{3} \right] \cdot 2 = \left[\frac{1}{12} : 5 + \frac{1}{3} \right] \cdot 2 = \left[\frac{1}{60} + \frac{1}{3} \right] \cdot 2 =$$

$$= \left[\frac{1+20}{60} \right] \cdot 2 = \frac{21}{60} \cdot 2 = \frac{21}{60} \cdot \frac{2}{1} = \frac{21 \cdot 2}{60 \cdot 1} = \frac{42}{60}$$

Las fracciones se pueden expresar como decimales realizando la división entre numerador y denominador. Así, $\frac{42}{60} = 0,7$.

Potencias y raíces cuadradas

1.5.

⚠ Importante

Un número elevado a exponente 1 es igual al mismo número, mientras que elevado a 0 dará como resultado la unidad.

$$a^1 = a; a^0 = 1$$

Para cambiar el exponente de una potencia de signo lo que se hace es invertir la base.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

Se llama potencia a un producto de factores iguales. Es una forma simplificada de expresar ese tipo de productos, como se comprobará a continuación.

Las raíces cuadradas pueden ser **exactas** o **enteras**. Una raíz cuadrada de un número es exacta si dicho número se puede expresar como el producto de un número por sí mismo, es decir, como un cuadrado perfecto, $\sqrt{144} = \sqrt{12^2} = 12$. En caso contrario se dirá que es entera, por ejemplo en el caso de $\sqrt{15}$, no existe ningún número entero que multiplicado por sí mismo dé 15, con lo que $\sqrt{15}$, es una raíz entera. Por tanteo se puede comprobar que se encuentra entre 3 y 4, ya que $3^2 = 9$, no llega a 15 y $4^2 = 16$, se pasa. Se puede expresar como $3 < \sqrt{15} < 4$.

Todas las raíces, sean o no cuadradas, se pueden expresar como potencias de exponente fraccionario.

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

Operaciones con potencias

1.5.1.

Los elementos de una potencia son base a y exponente n (base $\rightarrow a^n \rightarrow$ exponente), donde n es el número de veces que hay que multiplicar el número a .

$$a^n = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \dots n \text{ veces}$$

Las **operaciones** que se pueden realizar con potencias son el producto, cociente, potenciación y radicación. Si lo que se quiere es **sumar** o **restar** potencias, habrá que desarrollar las potencias y luego efectuar la operación.

Para **multiplicar** potencias hay que comprobar si tienen bases iguales, en cuyo caso, se multiplican dejando la misma base y sumando los exponentes.

$$A^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

$$3^5 \cdot 3^2 \cdot 3^{-60} = 3^{5+2-60} = 3^{-53} = \frac{1}{3^{53}}$$

$$2^4 \cdot 3^2 \cdot 2^3 \cdot 3^9 = 2^{4+3} \cdot 3^{2+9} = 2^7 \cdot 3^{11}$$

$5^7 \cdot 5 = 5^{7+1} = 5^8 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 390\,625$. El resultado se puede dejar en potencia o desarrollar según se pida en cada caso.

Si las potencias tienen distinta base pero el mismo exponente, para realizar su producto se multiplican las bases y se deja el mismo exponente.

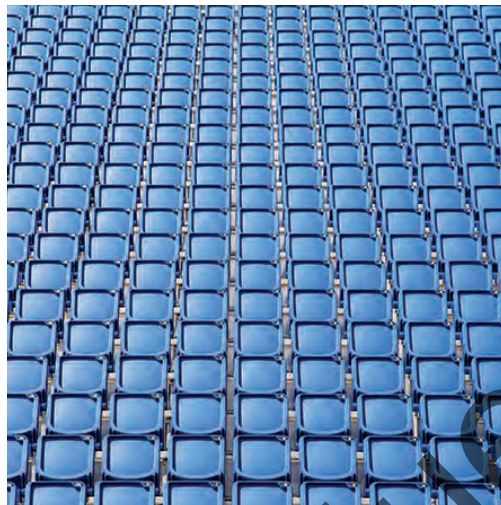
$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$

$$2^5 \cdot 3^5 = (2 \cdot 3)^5 = 6^5 = 7776$$

Las potencias que tienen distinta base y distinto exponente se resuelven desarrollando previamente las potencias para luego realizar el cálculo sobre las cifras desarrolladas.

$$2^4 \cdot 5^3 = 16 \cdot 125 = 2000$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^3 = \frac{1}{4} \cdot \frac{125}{27} = \frac{125}{108}$$



🗨 Vocabulario

Radicación: la radicación de un número (radicando) será otro número (raíz enésima) que elevado a determinado exponente (orden) es equivalente al propio radicando.

Para **eleva**r un producto a una potencia se elevan cada uno de los factores por separado y posteriormente se realiza la operación.

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

$$(2 \cdot 5)^3 = 2^3 \cdot 5^3 = 8 \cdot 125 = 1000$$

$$\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{7}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{7}\right)^2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{9}{49} = \frac{9}{196}$$

Para **dividir** potencias que tienen la misma base se deja la base igual y se restan directamente los exponentes.

$$a^n : a^m = a^{n-m}$$

$$3^{12} : 3^5 = 3^{12-5} = 3^7$$

$$4^6 : 4^5 = 4^{6-5} = 4^1 = 4$$

$$2^4 : 2^4 = 2^{4-4} = 2^0 = 1$$

Si por el contrario, las potencias tienen distinta base y el mismo exponente, para efectuar el cociente se dividen las bases y se deja el mismo exponente.

$$a^n : b^n = (a : b)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

$$6^2 : 3^2 = (6 : 3)^2 = \left(\frac{6}{3}\right)^2 = 2^2$$

Las potencias que tienen distinta base y distinto exponente se tienen que desarrollar para poder realizar la división. En este caso no quedará otra alternativa que buscar la resolución de la operación sobre números enteros.

$$7^3 : 5^2 = 343 : 25 = 13,72$$

Para elevar un cociente a una potencia se elevan numerador y denominador a dicha potencia. De este modo se desglosa la potenciación de cada cociente.

$$(a : b)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

$$\left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{5^2}{3^2} = \frac{5 \cdot 5}{3 \cdot 3} = \frac{25}{9}$$

Para elevar una potencia a otra potencia se multiplican los exponentes. De este modo se elevará a una potencia común a todos los factores.

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

$$(2^3)^4 = 2^{3 \cdot 4} = 2^{12}$$

$$(3^2)^4 = 3^{2 \cdot 4} = 3^8$$

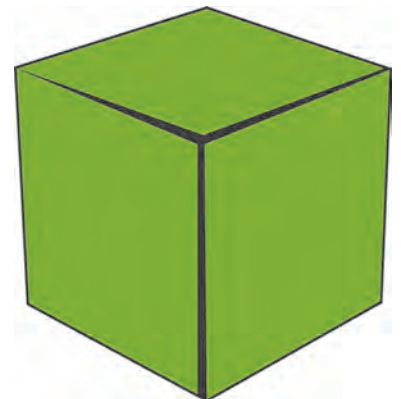
$$\left[\left(\frac{1}{3}\right)^2\right]^5 = \left(\frac{1}{3}\right)^{10}$$

En resumen, con las potencias se puede hacer todo tipo de operaciones, tal y como se ha comprobado. Para ello, habrá que prestar especial atención al valor de las bases y los exponentes en función del tipo de operación que se vaya a realizar, ya sean productos de potencias, elevar un producto a una potencia o dividir potencias.



?? ¿Sabías que...?

Cuando se habla del cuadrado (x^2) o cubo (x^3) de un número se hace referencia al área de estas dos figuras.



Cálculo de potencias de base 10

1.5.2.

Ejemplo

La velocidad de la luz es aproximadamente.

$$300\ 000 \frac{\text{km}}{\text{s}} = 3 \cdot 100\ 000 = 3 \cdot 10^5 \text{ km/s}$$

Un billón es un millón de millones, es decir, si un millón se escribe con 6 ceros, un millón de millones contendrá 12 ceros y se escribirá $1\ 000\ 000\ 000\ 000 = 10^{12}$.

Una **potencia de base 10** es igual a la unidad seguida de tantos ceros como indica el exponente. De este modo:

$$10^n = 1000 \dots n \text{ ceros}$$

$$10^3 = 1000; 10^2 = 100; 10^1 = 10; 10^0 = 1$$

Si el exponente es negativo el resultado va a ser fraccionario. Tal y como se indican en el siguiente ejemplo, se pasa la potencia al denominador con exponente positivo y se aplica la unidad como numerador.

$$10^{-n} = \frac{1}{10^n}$$

$$10^{-5} = \frac{1}{10^5} = \frac{1}{100\ 000}$$

Cuando se tengan cantidades muy grandes o muy pequeñas se puede utilizar esta propiedad a la inversa para poder expresar estos números de forma más sencilla.

Operaciones con raíces cuadradas

1.5.3.

Consulta

Para descubrir un método de cálculo en red de raíces cuadradas consulta la siguiente página web: <http://bit.ly/1v1ORfg>

Las **operaciones** que se pueden realizar con raíces son las mismas que se han visto hasta ahora; suma, resta, multiplicación, división, potenciación y radicación.

Además, se explicará cómo introducir y extraer factores de un radical, lo cual será útil a la hora de efectuar dichas operaciones.

La condición suficiente y necesaria para poder **multiplicar raíces** es que tengan el mismo índice.

El resultado es una raíz del mismo índice que tiene por radicando el producto de los radicandos.

$$\sqrt{p} \cdot \sqrt{q} = \sqrt{p \cdot q}$$

Si los factores tienen coeficientes distintos de la unidad al efectuar el producto, estos se multiplican entre sí.

$$a\sqrt{p} \cdot b\sqrt{q} = (a \cdot b) \sqrt{p \cdot q}$$

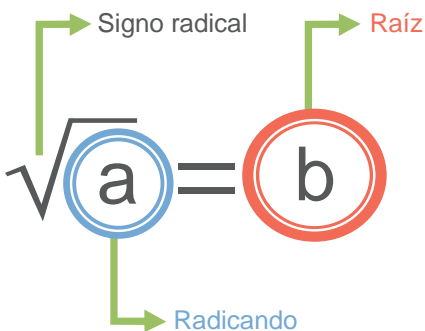
$$\sqrt{\frac{2}{5}} \cdot \sqrt{\frac{3}{11}} = \sqrt{\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{11}} = \sqrt{\frac{6}{55}}$$

$$7\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{4} = 7 \cdot 2 \cdot 1 \sqrt{5 \cdot 3 \cdot 4} = 14\sqrt{60}$$

Al igual que en el producto la condición suficiente y necesaria para dividir raíces es que tengan el mismo índice. El **cociente** o **división de raíces** cuadradas es otra raíz cuadrada cuyo radicando es el cociente de los radicandos.

$$\sqrt{p} : \sqrt{q} = \sqrt{p : q} = \sqrt{\frac{p}{q}}$$

Tal y como se ha desarrollado, las operaciones con raíces que posean el mismo índice no suponen un inconveniente mayor. Sin embargo, se explicará también cómo elevar una raíz y hallar la raíz de una raíz.





Si los coeficientes son distintos de la unidad al efectuar el cociente, estos se dividen entre sí.

$$a\sqrt{p} : b\sqrt{q} = (a : b) \sqrt{p : q} = \left(\frac{a}{b}\right) \sqrt{\frac{p}{q}}$$

$$\sqrt{6} : \sqrt{3} = \sqrt{6 : 3} = \sqrt{2}$$

$$6\sqrt{5} : 2\sqrt{3} = (6 : 2) \sqrt{5 : 3} = 3 \cdot \sqrt{5 : 3} = 3 \sqrt{\frac{5}{3}}$$

$$6\sqrt{4} : 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = (6 : 2) \sqrt{4 : 2} \cdot \sqrt{3} = 3 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = (3 \cdot 1) \sqrt{2 \cdot 3} = 3 \cdot \sqrt{6}$$

Para **eleva una raíz** a una potencia se debe dejar el mismo índice y elevar su correspondiente radicando.

$$(\sqrt{a})^n = \sqrt{a^n}$$

$$(\sqrt{2})^3 = \sqrt{2^3} = \sqrt{8}$$

$$(4\sqrt{3})^2 = 4^2 \sqrt{3^2} = 16\sqrt{9} = 16 \cdot 3 = 48$$

La **raíz de una raíz** es otra raíz que tiene por índice el producto de los índices y por radicando el mismo.

$$\sqrt{\sqrt{a}} = \sqrt[4]{a}$$

La forma de **introducir números en un radical** es poner ese número elevado al índice dentro de la raíz, multiplicando al radicando.

$$a\sqrt{b} = \sqrt{a^2 \cdot b} \quad a, b \in \mathbb{R}$$

$$3\sqrt{5} = \sqrt{3^2 \cdot 5} = \sqrt{9 \cdot 5} = \sqrt{45}$$

$$2\sqrt{\frac{1}{8}} = \sqrt{2^2 \cdot \frac{1}{8}} = \sqrt{4 \cdot \frac{1}{8}} = \sqrt{\frac{4}{8}} = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

En una raíz cuadrada se pueden **extraer los factores** que sean cuadrados perfectos. Si dentro del radical se encuentra el radicando descompuesto en factores primos, bastará con extraer aquellos factores que tengan de exponente 2 o múltiplo de 2 y saldrán multiplicando, si estaban multiplicando, dentro del radicando o dividiendo si esa era su función.

Si el exponente es múltiplo de 2, el número quedará elevado al exponente dividido entre el índice.

$$\sqrt{a^2} = a; \quad \sqrt{a^{2n}} = a^{\frac{2n}{2}} = a^n$$

El sistema para extraer factores del radical es el método que se utilizará para hallar la raíz de una potencia.

$$\sqrt{5^8} = 5^{8/2} = 5^4 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625$$

La condición necesaria y suficiente para realizar la suma de raíces es que los términos sean semejantes, es decir, que tengan el mismo índice y el mismo radicando.

Ejemplo

$$\sqrt{5^2 \cdot 2 \cdot 3^4} = 5 \cdot 3^2 \sqrt{2}$$

En este caso, el 2 no está elevado al índice por lo que no se puede extraer. El 5 al estar elevado al índice sale sin exponente y en el caso del 3, como su exponente es múltiplo de 2, se divide el exponente entre el índice y el resultado es el nuevo exponente.

Cuando en el radicando hay un número compuesto, para saber si se puede extraer algún factor hay que descomponer dicho número en factores primos y a partir de ahí, se resuelve como se observa a continuación:

$$\sqrt{720} = \sqrt{2^4 \cdot 3^2 \cdot 5} = (2^2 \cdot 3) \sqrt{5} = (4 \cdot 3) \sqrt{5} = 12\sqrt{5}$$

?? ¿Sabías que...?

El término de raíz procede del latín *radix*, por lo que el actual símbolo de la raíz deriva de la letra r inicial del término.



?? ¿Sabías que...?

El empleo de las raíces cuadradas data de hace 4000 años en el antiguo Egipto, durante el reinado de Apofis I.



Para realizar la operación se **suman** o se **restan** los coeficientes y se deja la misma raíz.

$$a\sqrt{p} + b\sqrt{p} - c\sqrt{p} = (a + b - c)\sqrt{p}$$

$$2\sqrt{5} + 11\sqrt{5} - 4\sqrt{5} = (2 + 11 - 4)\sqrt{5} = 9\sqrt{5}$$

Se ha de recordar que si el radical no tiene ningún número delante es porque su coeficiente es 1; por ejemplo, $1\sqrt{2} = \sqrt{2}$.

$$12\sqrt{2} + \sqrt{2} - 5\sqrt{2} = (12 + 1 - 5)\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$$

Si los radicandos son distintos pueden darse dos casos.

Por una parte, que los radicandos sean números primos. En este caso no se puede realizar la suma o resta en forma de radical.

$$12\sqrt{2} + \sqrt{3} - 4\sqrt{5}$$

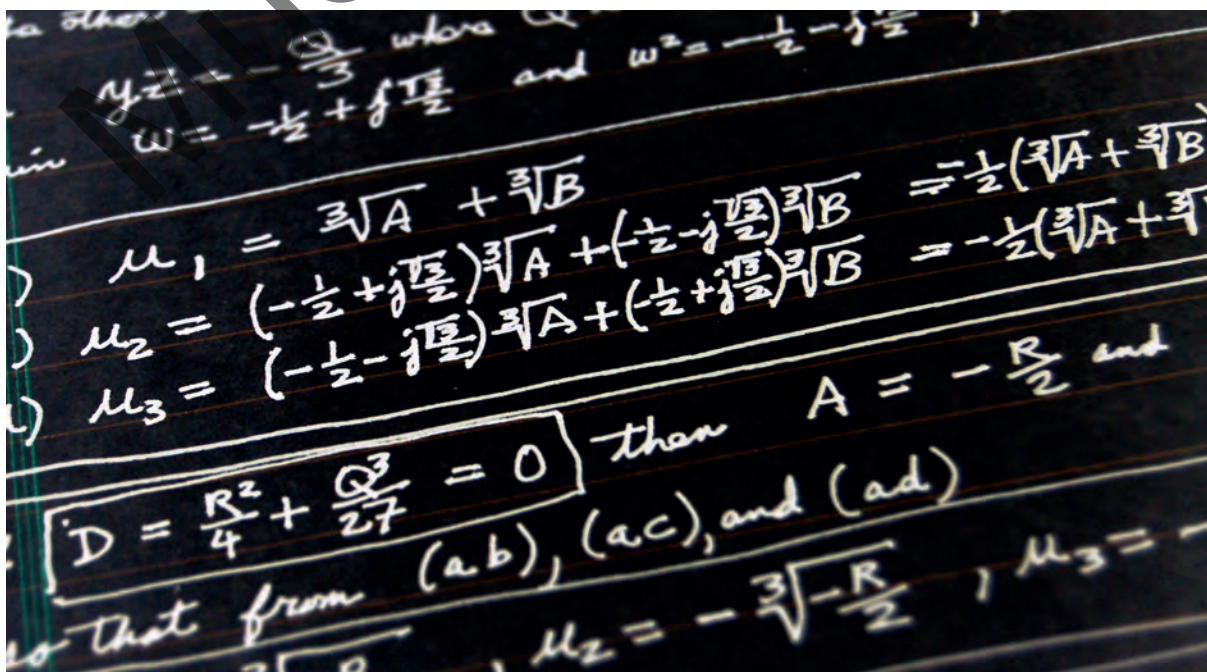
Por otra parte, que los radicandos sean números compuestos. En este caso se extraen todos los factores posibles del radical y así se verá si los radicandos quedan iguales.

$4\sqrt{2} + 3\sqrt{18} - \sqrt{32} \rightarrow$ Los radicandos son distintos así que se necesita extraer todos los factores posibles:

$$4\sqrt{2} + 3\sqrt{(3^2 \cdot 2)} - \sqrt{(2^4 \cdot 2)} = 4\sqrt{2} + 3 \cdot 3\sqrt{2} - 2^2 \sqrt{2} = 4\sqrt{2} + 9\sqrt{2} - 4\sqrt{2} = (4 + 9 - 4)\sqrt{2} = 9\sqrt{2}$$

Y se sumarán los sumandos con radicandos semejantes:

$$\begin{aligned} 2\sqrt{2} + 5\sqrt{12} - \sqrt{8} + 3\sqrt{75} &= 2\sqrt{2} + 5\sqrt{2^2 \cdot 3} - \sqrt{2^2 \cdot 2} + 3\sqrt{5^2 \cdot 3} = \\ &= 2\sqrt{2} + 5 \cdot 2\sqrt{3} - 2\sqrt{2} + 3 \cdot 5\sqrt{3} = 2\sqrt{2} + 10\sqrt{3} - 2\sqrt{2} + 15\sqrt{3} = \\ &= 0\sqrt{2} + 25\sqrt{3} = 0 + 25\sqrt{3} = 25\sqrt{3} \end{aligned}$$



1.6. La proporcionalidad

En matemáticas se dice que dos magnitudes son proporcionales cuando existe una relación entre ellas. Si una varía la otra también cambia.

En algunos casos cuando una magnitud aumenta (o disminuye) la otra también lo hace. Se dice que las magnitudes son **directamente proporcionales**. Por ejemplo, las dimensiones de una piscina y los litros de agua necesarios para llenarla, cuanto mayor sea la piscina más agua se necesita.

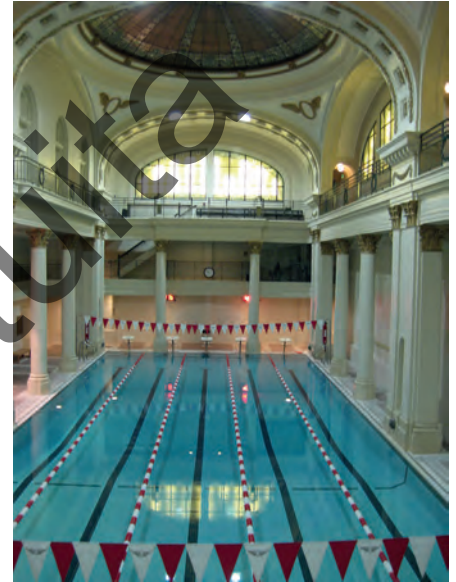
En otros, por el contrario, que una magnitud aumente (o disminuya) hace que la otra disminuya (o aumente), este tipo de magnitudes son **inversamente proporcionales**. Un ejemplo sería el número de obreros que ejecutan una obra y el tiempo que tardan en terminar; así, cuantos más obreros trabajen menos tiempo necesitan para terminar la obra.

A continuación se tratará cómo distinguir estas proporciones y su aplicación práctica en la resolución de problemas.

En este punto se estudiará también el **porcentaje** o tanto por ciento, ya que no es más que una proporción de una parte respecto a un total que está dividido en 100 unidades. El tanto por ciento, se puede expresar en forma de fracción.

Ejemplo

El 25 % de una cantidad, representa la cuarta parte de dicha cantidad, es decir, $\frac{1}{4}$ del número.



1.6.1. Cálculo de la proporcionalidad directa. Resolución de problemas

Dos magnitudes son **directamente proporcionales** si al multiplicar la primera por un número, la segunda queda multiplicada por ese mismo número. A medida que aumenta una magnitud la otra también aumenta.

Magnitud A	p	2p	3p	4p
Magnitud B	q	2q	3q	4q

Al dividir cualquier valor de la segunda magnitud entre su valor correspondiente de la primera se obtiene un valor constante. Ese valor se denomina **constante de proporcionalidad**.

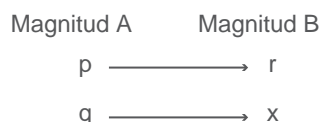
$$\frac{4q}{4p} = \frac{3q}{3p} = \frac{2q}{2p} = \frac{q}{p} = k$$

Así, se puede hallar cualquier valor de la segunda magnitud multiplicando la primera por k.

$$q = k \cdot p$$

Otra forma es usar la **regla de tres simple directa**, ya que si se toman dos pares de valores correspondientes se forma una proporción.

Se ordenan los datos y la incógnita por lo que es importante poner las magnitudes iguales en la misma columna.



Ejemplo

La relación entre el peso de las manzanas y el precio por kg son magnitudes directamente proporcionales. Sabiendo que el kg de manzanas cuesta 1,80 € se realizará una tabla para saber cuánto costarían 2 kg, 3 kg y 4 kg. Se hallará también la constante de proporcionalidad.

Peso de la fruta en kg	1	2	3	4
Precio en €	1,80	3,60	5,40	7,20

$$k = \frac{7,20}{4} = \frac{5,40}{3} = \frac{3,60}{2} = \frac{1,80}{1} = 1,80$$

 **Ejemplo**

El consumo de agua mineral de una familia es de 100 l en un mes. ¿Cuántos l consumirán al cabo del año? (1 año = 12 meses).

I de agua	Tiempo en meses
100	1
x	12

$$\frac{100}{x} = \frac{1}{12}$$

$$100 \cdot 12 = 1 \cdot x$$

$$x = \frac{100 \cdot 12}{1} = 1200 \text{ l en un año.}$$

Se forman dos razones con los valores correspondientes y así se obtiene una proporción igualando ambas razones.

$$\frac{q}{p} = \frac{r}{x}$$

Se calcula el valor de la incógnita sabiendo que producto de medios es igual a producto de extremos.

$$p \cdot x = q \cdot r$$

$$x = \frac{q \cdot r}{p}$$

Cálculo de la proporcionalidad inversa. Resolución de problemas

1.6.2.

Cuando dos magnitudes son **inversamente proporcionales**, a medida que aumenta una magnitud la otra disminuye. Al multiplicar una magnitud por un número, la otra magnitud correspondiente a ese valor queda dividida por ese mismo número.

Magnitud A	p	2p	3p	4p
Magnitud B	q	q : 2	q : 3	q : 4

Para hallar la **constante de proporcionalidad** se multiplican las magnitudes entre sí.

$$k = p \cdot q$$

Otra forma de solucionar estos problemas es resolviendo una **regla de tres simple inversa**. Para empezar, se ordenan los datos y la incógnita. Es importante poner las magnitudes iguales en la misma columna.

Magnitud A		Magnitud B
p	→	r
q	→	x

Tras esto, se forman dos razones con los valores correspondientes, obteniendo una proporción igualando ambas razones. En este caso, al ser magnitudes inversamente proporcionales se da la vuelta a la razón que no tiene la incógnita.

$$\frac{q}{p} = \frac{r}{x}$$

Se calcula el valor de la incógnita sabiendo que producto de medios es igual a producto de extremos.

$$q \cdot x = p \cdot r$$

$$x = \frac{p \cdot r}{q}$$

Se despeja la incógnita como si de una ecuación más se tratase.

 **Ejemplo**

Seis obreros descargan un barco pesquero en dos horas. ¿Cuánto tardarán en hacer ese mismo trabajo 4 obreros?

Se hace la tabla y se colocan los datos y las incógnitas:

Obreros	6	4
Tiempo	2	x

Se identifica que se trata de magnitudes inversamente proporcionales. Cuantos menos obreros trabajen más tiempo necesitarán para hacer el mismo trabajo, es decir, a medida que aumenta una magnitud la otra disminuye.

Se sabe que el producto entre las magnitudes es constante:

$$6 \cdot 2 = 4 \cdot x$$

Se despeja la incógnita:

$$x = \frac{6 \cdot 2}{4} = \frac{12}{4} = 3 \text{ horas}$$



En ocasiones es necesario relacionar tres o más magnitudes, utilizándose para ello la denominada **regla de tres compuesta**. Relacionando estas magnitudes se obtiene la magnitud desconocida.

La regla de tres compuesta está formada por varias reglas de tres simples y, al igual que se ha visto anteriormente, se tendrá que comprobar si son directa o inversamente proporcionales para hallar con éxito el dato incógnita.

Una vez planteada la regla de tres compuesta, se compara cada dato con la incógnita para dilucidar si se trata de una proporcionalidad directa o inversa, planteando la proporción que corresponda en cada caso.

Según esto se pueden dar tres casos:

1.º Regla de tres compuesta directa	Dadas las magnitudes A, B y C, la incógnita se encuentra en la magnitud C. Las magnitudes A y C son directamente proporcionales. De la misma forma, las magnitudes B y C son también directamente proporcionales.
-------------------------------------	---

$$\begin{array}{ccc}
 A & B & C \\
 p \rightarrow r & \rightarrow & t \\
 q \rightarrow s & \rightarrow & x \\
 \frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s} & = & \frac{t}{x} \\
 x & = & \frac{t \cdot q \cdot s}{p \cdot r}
 \end{array}$$

Un grupo de 5 obreros han cavado 3 m en 2 horas de trabajo. ¿Cuánto cavarán un grupo de 6 obreros trabajando durante 3 horas?

Se tienen tres magnitudes: obreros, metros cavados y horas de trabajo. Se formará una regla de tres compuesta de dos simples.

Ahora, se comprobará si las reglas de tres simples son directas o inversas:

Si 5 obreros cavan 3 m, más obreros cavarán más metros, por lo que obreros y metros son magnitudes directamente proporcionales.

Si trabajando 2 horas cavan 3 m, trabajando más horas cavarán más metros, horas y metros son igualmente, magnitudes directamente proporcionales.

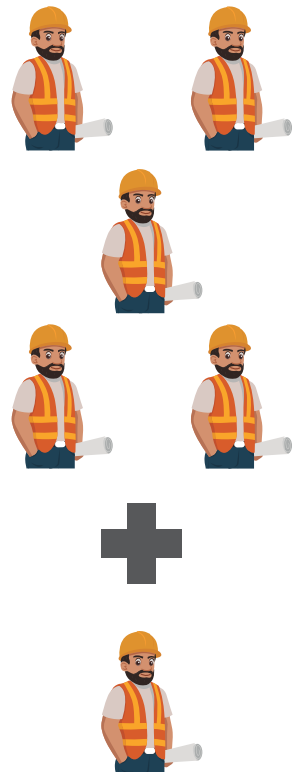
$$5 \text{ obreros} \rightarrow 2 \text{ horas} \rightarrow 3 \text{ m}$$

$$6 \text{ obreros} \rightarrow 3 \text{ horas} \rightarrow x \text{ m}$$

$$\frac{5}{6} \cdot \frac{2}{3} = \frac{3}{x}$$

$$x = \frac{3 \cdot 6 \cdot 3}{5 \cdot 2} = 5,4 \text{ m}$$

Se resuelve así que 6 obreros durante 3 horas de trabajo cavarán 5,4 m.



En el ejemplo expuesto anteriormente, se cuenta con un obrero a mayores y una hora más de tiempo para trabajar. Así, se resuelve la incógnita (x) que se sabrá que será mayor a 3 m teniendo en cuenta la mayor mano de obra y mayor tiempo para trabajar.

2.º Regla de tres compuesta inversa

Dadas las magnitudes A, B y C, la incógnita se encuentra en la magnitud C. Las magnitudes A y C son inversamente proporcionales. De la misma forma, las magnitudes B y C son también inversamente proporcionales.

?? ¿Sabías que...?

Proporcionalmente, las hormigas son de los animales más fuertes del planeta, superando a los elefantes o rinocerontes entre otros. Estas son capaces de levantar más de 50 veces su propio peso.

$$\begin{array}{ccc}
 A & B & C \\
 p \rightarrow r \rightarrow t \\
 q \rightarrow s \rightarrow x \\
 \frac{q}{p} \cdot \frac{s}{r} = \frac{t}{x} \\
 x = \frac{t \cdot p \cdot r}{q \cdot s}
 \end{array}$$



Ocho obreros trabajando ocho horas diarias construyen una pared en un día. ¿Cuánto tardarán en realizar esa misma pared cuatro obreros trabajando seis horas diarias?

Se tienen tres magnitudes: obreros, horas diarias trabajadas y días de trabajo. En consecuencia, se formará una regla de tres compuesta de dos simples.

Toca comprobar si las reglas de tres simples son directas o inversas:

Si 8 obreros tardan 1 día, menos obreros tardarán más días en hacer el mismo trabajo, por lo que obreros y días son magnitudes inversamente proporcionales.

Si trabajando 8 horas al día tardan 1 día, trabajando menos horas al día tardarán más días en realizar ese mismo trabajo, horas y días son igualmente magnitudes inversamente proporcionales.

$$\begin{array}{l}
 8 \text{ obreros} \rightarrow 8 \text{ horas/día} \rightarrow 1 \text{ día} \\
 4 \text{ obreros} \rightarrow 6 \text{ horas/día} \rightarrow x \text{ días}
 \end{array}$$

$$\frac{4}{8} \cdot \frac{6}{8} = \frac{1}{x}$$

$$x = \frac{8 \cdot 8 \cdot 1}{4 \cdot 6} \approx 2,7 \text{ días}$$



En el ejemplo que se expuesto se cuenta con la mitad de obreros, así como dos horas diarias menos para trabajar. Así, se resuelve la incógnita (x) que se sabe que será mayor a 1 día, teniendo en cuenta la menor mano de obra y el menor tiempo para trabajar.

El resultado final estima en 2,7 días de trabajo teniendo en cuenta el menor número de obreros y el menor volumen de trabajo diario.



Por último, se explica la regla de tres compuesta mixta, formada por magnitudes directa e indirectamente proporcionales.

3.º Regla de tres compuesta mixta

Dadas las magnitudes A, B y C, la incógnita se encuentra en la magnitud C. Las magnitudes A y C son directamente proporcionales. Por el contrario, las magnitudes B y C son inversamente proporcionales. La condición es que una de las reglas de tres simples sea directa y la otra inversa.

$$\begin{array}{ccc}
 A & B & C \\
 p \rightarrow r & \rightarrow & t \\
 q \rightarrow s & \rightarrow & x \\
 \frac{q}{p} \cdot \frac{s}{r} & = & \frac{t}{x} \\
 x & = & \frac{t \cdot p \cdot r}{q \cdot s}
 \end{array}$$

En un corral hay 100 gallinas que se alimentan de 120 kg de pienso durante 45 días. ¿Cuántos días podrán alimentarse 70 gallinas con 60 kg de pienso?

Se tienen tres magnitudes: número de gallinas, kg de pienso y días que dura el pienso. En consecuencia, se formará una regla de tres compuesta de dos simples. Ahora, tocará comprobar si las reglas de tres simples son directas o inversas:

Si 100 gallinas comen durante 45 días con una cantidad de pienso, menos gallinas tendrán pienso para más días, por lo que gallinas y kg de pienso son magnitudes inversamente proporcionales.

Si con 120 kg de pienso comen durante 45 días, con menos kg de pienso comerán menos días. Kg de pienso y días son magnitudes directamente proporcionales.

$$100 \text{ gallinas} \rightarrow 120 \text{ kg} \rightarrow 45 \text{ días}$$

$$70 \text{ gallinas} \rightarrow 60 \text{ kg} \rightarrow x \text{ días}$$

$$\frac{70}{100} \cdot \frac{120}{60} = \frac{45}{x}$$

$$x = \frac{45 \cdot 100 \cdot 60}{70 \cdot 120} \approx 32 \text{ días}$$

En este caso, el ejemplo anterior requiere la aplicación de una regla de tres compuesta mixta ya que se tienen menos gallinas que en un principio, con lo que se necesitará menos pienso, pero este también se reduce a la mitad. Se tendrá pienso para menos días ya que la diferencia entre el pienso inicial y actual es mayor que entre el número de gallinas inicial y actual.

El resultado final estima 32 días de duración del pienso como sustento alimenticio, a pesar de disponer también de menos gallinas.



Cálculo del tanto por ciento y tanto por uno

1.6.3.

! Importante

Los porcentajes están muy presentes en el día a día, en infinidad de ámbitos o dedicaciones. Esto es debido a su fácil cálculo o estimación y a su elevado grado de representatividad. Así, cuando alguien transmite una cantidad sobre un total mediante un porcentaje, se trata de generar una asimilación rápida y gráfica acerca de algo.



✎ Ejemplo

No es lo mismo decir que el planeta Tierra está compuesto por 1 400 000 km³ de agua, que decir que el 75 % del planeta es agua. Ambos datos pueden ser ciertos, sin embargo, expresando el segundo se logra una interpretación más fácil y directa.

El porcentaje representa una parte de un total. A continuación se plantearán varios métodos aplicados al cálculo de porcentajes que se podrán utilizar posteriormente en la resolución de problemas cotidianos o financieros habituales (descuentos, intereses, impuestos, etc.).

Para **calcular el tanto por ciento** es necesario tener en cuenta que el x por ciento de una cantidad significa que, de cada 100, se toma x. Se expresa como x % y representa una fracción de denominador 100: $\frac{x}{100}$.

El x % de una cantidad hace referencia a la parte proporcional a x de cada cien unidades de esa cantidad. Sirve para comparar cantidades, relacionando una cantidad con el total que sería el 100 %. Para el cálculo del tanto por ciento hay que basarse en una proporción directa, por lo que se pueden utilizar los mismos métodos que para el cálculo de proporcionalidad directa.

Para **formar una proporción** o razón, se comparan las cantidades total y parcial con los porcentajes. En la proporción planteada se despeja la incógnita, sabiendo que producto de medios es igual a producto de extremos.

Cantidad	Porcentaje (%)
total	100
parcial	x

Otra forma es utilizar la **regla de tres directa**, siguiendo los pasos especificados a continuación.

$$\frac{\text{cantidad total}}{\text{cantidad parcial}} = \frac{100}{x}$$

$$x = \frac{100 \cdot \text{cantidad parcial}}{\text{cantidad total}}$$

Para hallar el x % de una cantidad C, primero se pone el x % en forma de fracción:

$$X \% \text{ de } C = \frac{X}{100} \text{ de } C$$

Tras esto se sustituye el «de» por una multiplicación y se calcula:

$$X \% \text{ de } C = \frac{X}{100} \cdot C = \frac{X \cdot C}{100}$$

Como se aprecia a continuación, la incógnita no siempre es el porcentaje, también puede ser la cantidad total o inicial o la cantidad parcial o final. Por ejemplo, para calcular el 25 % de 2345 se puede resolver de todas las formas conocidas.

Una de las opciones viables para calcular un porcentaje es formar una proporción, como se ejemplifica a continuación:

Cantidad	Porcentaje (%)
2345	100
x	25

