COMPETENCIA
MATEMÁTICA-N2

Jéssica Contreras Martínez

2.ª edición

IDEASPROPIAS
editorial

COMPETENCIA MATEMÁTICA-N2

ISBN: 978-84-9839-555-6

Depósito legal: VG 73-2015

Autora: Jéssica Contreras Martínez

Formato: 21 x 29,7 cm

Páginas: 140

Impreso en España

Matemáticas N2

Matemáticas N2

Índice

1. Utilización de los números para la resolución de problemas

Contenidos

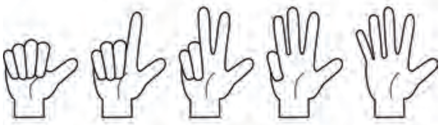
Objetivos

- Realizar cálculos en los que intervengan distintos tipos de números naturales y enteros, así como fraccionarios y decimales sencillos, utilizando las propiedades más importantes y aplicando con seguridad a una amplia variedad de contextos de la vida cotidiana el modo de cálculo más adecuado.
- Resolver problemas de la vida cotidiana, realizando las 4 operaciones básicas con números enteros, naturales, decimales y fraccionarios, utilizando la forma de cálculo más apropiada (cálculo mental, cálculo aproximado, calculadora) y comprobando la coherencia y precisión de los resultados obtenidos.
- Solucionar situaciones cotidianas relacionadas con el cálculo de porcentajes, aplicando las reglas básicas de proporcionalidad numérica, identificando la equivalencia entre porcentajes y fracciones y verificando el ajuste de la solución a la situación planteada.
- Utilizar espontáneamente los elementos y razonamientos matemáticos para interpretar y producir información, para resolver problemas y para tomar decisiones sobre situaciones y hechos de la vida diaria.

Reflexión inicial

Entender las bases de las matemáticas consiste en conocer los conjuntos de números existentes, la simbología utilizada y la interpretación de las reglas para operar con ellos. En esta unidad didáctica se explican estos conceptos al tiempo que se acompañan de ejemplos que ayuden a interiorizar el contenido.

Introducción 1.1.



Los números surgen de la necesidad de contar y se utilizan diariamente para expresar una infinidad de situaciones, por ejemplo, la hora, la distancia entre 2 ciudades, el precio de un producto y muchas más que se estudiarán en esta unidad didáctica.

Además de servir para contar, los números también se utilizan para identificar, es el caso del DNI (Documento Nacional de Identidad), del número de una libreta bancaria o del pin de una tarjeta de crédito. También se pueden usar para ordenar, para lo que se recurre a los números ordinales: 1°, 2°, 3°, 4°, 20°, 21°, etc.

Así pues, aunque no se perciba, se vive rodeado de números. Por ello, en esta unidad didáctica se estudiarán sus propiedades y las operaciones básicas que sirven de ayuda en la resolución de problemas.

Sistema posicional de numeración decimal 1.2.

Ejemplo

El número 246 está formado por 2 centenas, 4 decenas y 6 unidades. El 6, al ser el primer dígito por la derecha, corresponde a las unidades. Así, 246 = = 2 C + 4 D + 6 U = 200 U + 40 U + 6 U.

El sistema de numeración que se usa actualmente es decimal y posicional.

Es **decimal** porque se utilizan 10 dígitos o símbolos: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9. Cualquier número se obtiene como combinación de estos dígitos. Y es también **posicional,** porque el valor de los dígitos cambia según la posición en la que se encuentren. Así, el número 321 no tiene el mismo valor que el 123.

Unidades, decenas y centenas 1.2.1.

Dependiendo de la posición en la que se encuentre un dígito, se habla de unidades, decenas o centenas.

Centenas	Decenas	Unidades
2 C	4 D	6 U
200 U	40 U	6 U

Se considera el 1 como la **unidad.** Por ejemplo, el 9 equivale a 9 unidades. Un número se puede descomponer en unidades, decenas y centenas. La primera cifra empezando por la derecha corresponde siempre a las unidades, la segunda a las decenas y la tercera a las centenas.

Cuando se tienen 10 unidades, se agrupan formando 1 **decena.** Se puede expresar de la siguiente forma: 10 U = 1 D. Y cuando hay 10 decenas, se forma 1 **centena,** que a su vez equivale a 100 unidades. Por lo tanto, 100 U = 10 D = 1 C.

También se puede obtener un número a partir de su descomposición: 5 C + 6 D + + 3 U = 563. Otro ejemplo sería: 300 U + 50 U + 9 U = 359.

Como el sistema de numeración decimal es posicional, el valor de cada cifra depende de su posición en el número. Así, en el número 404, el 4 de la izquierda se refiere a 4 centenas, es decir, 400 unidades; mientras que el 4 de la derecha significa 4 unidades.

Al igual que con las decenas y las centenas, también se pueden formar unidades de millar, decenas de millar, centenas de millar, unidades de millón, etc. Un millón de millones forman un billón.

Centenas de millar	Decenas de millar	Unidades de millar	Centenas	Decenas	Unidades
10 DM 1 000 000 U	10 UM 10 000 U	10 C 1000 U	10 D 100 U	10 U	1 U

1.3. Números naturales

Los **números naturales** son el conjunto formado por los números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8… Se usan para ordenar y contar.

En los siguientes apartados, se estudiará cómo realizar operaciones matemáticas con ellos.

Vocabulario

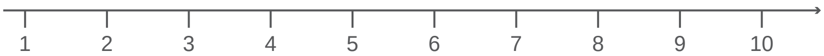
Conjunto: grupo de objetos o cosas que pueden ser, por ejemplo, números, colores o personas.

1.3.1. Representación y comparación de números naturales

El conjunto de los números naturales se indica con el símbolo N:

$$N = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots, 60, 61, 62, \ldots, 2341, 2342, \ldots\}$$

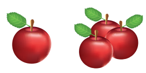
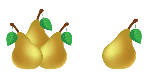
Los números naturales se pueden **representar** en una recta de la siguiente forma:



Dados 2 números naturales, es mayor el que está situado más a la derecha en la recta y menor el que está situado más a la izquierda.

Para **comparar** 2 números se usa el símbolo >, que significa mayor que. El número que está a su izquierda es mayor que el que está a la derecha. Por ejemplo, 2174 > 374.

También se usa el símbolo <, que significa menor que, siendo el número que está a su izquierda menor que el que está a la derecha. Por ejemplo, 599 < 4673. Conviene fijarse en que la punta de la flecha señala siempre el número menor.

Menor < mayor	Mayor > menor
	

Cuando los números tienen el mismo número de cifras, la comparación se hace de izquierda a derecha. Así, será mayor el que tenga la cifra más elevada empezando por la izquierda. Si dichas cifras son iguales, se pasará a comparar la segunda cifra por la izquierda y así sucesivamente. Por ejemplo, 428 < 436 o 8160 > 8101.

¿Sabías que...?

Los números naturales permiten clasificar los puestos en un podio.

1.3.2. Operaciones básicas con números naturales

Las operaciones básicas con números naturales son 4: la suma, la resta, la multiplicación y la división. En este apartado, se explicará cómo se realiza cada una de ellas.

La **suma** consiste en agrupar 2 o más números en uno y se considera la primera de las operaciones aritméticas elementales. Se expresa con el símbolo +, que se lee más.

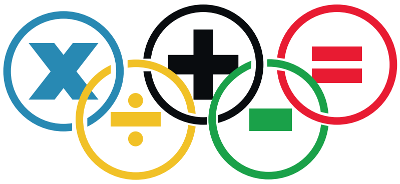
Para realizarla, se deben colocar los números uno debajo del otro, de manera que coincidan las unidades con las unidades, las decenas con las decenas, las centenas con centenas, etc.; y luego se suman de derecha a izquierda.

Ejemplo

Para calcular 234 + 562 los números deben colocarse de la siguiente forma:

	2	3	4	Sumando
+	5	6	2	Sumando
	7	9	6	Suma o total

¿Sabías que...?



Algunos certámenes de olimpiadas matemáticas hacen referencia en su logo a las 4 operaciones básicas que se pueden realizar con números naturales.

Ejemplo

La combinación de ciertos números especiales y las operaciones de suma y multiplicación dan lugar a contrucciones matemáticas muy curiosas, las pirámides de números.

1 x 8 + 1 = 9
12 x 8 + 2 = 98
123 x 8 + 3 = 987
1234 x 8 + 4 = 9876
12 345 x 8 + 5 = 98 765
123 456 x 8 + 6 = 987 654
1 234 567 x 8 + 7 = 9 876 543
12 345 678 x 8 + 8 = 98 765 432
123 456 789 x 8 + 9 = 987 654 321

Vocabulario

Minuendo: número al que se resta una determinada cantidad inferior.

Diferencia: resultado que se obtiene al realizar una resta.

Hay que tener especial cuidado cuando la suma de una de las columnas es 10 o superior, pues se deberá pasar la cifra de las decenas a la columna que está inmediatamente a la izquierda de esta. Un ejemplo sería la suma de 4395 + 382 + 76.

			1		La suma de las unidades es 5 + 2 + 6 = 13. Es decir, 1 decena y 3 unidades. Por tanto, se escribe el 3 y se pasa el 1 a la columna de las decenas. Normalmente, se afirma que se pone el 3 y se lleva una
	4	3	9	5	
+		3	8	2	
			7	6	
				3	

		2	1		La suma de las cifras de las decenas es 1 + 9 + 8 + + 7 = 25, con lo que se pone el 5 y se llevan 2
	4	3	9	5	
+		3	8	2	
			7	6	
			5	3	

		2	1		La suma de las centenas es 2 + 3 + 3 = 8, así que no se lleva nada
	4	3	9	5	
+		3	8	2	
			7	6	
		8	5	3	

		2	1		El resultado de la suma es 4853
	4	3	9	5	
+		3	8	2	
			7	6	
	4	8	5	3	

La **resta** o sustracción consiste en quitar una cantidad a otra, es decir, es la operación inversa a la suma. Se expresa con el símbolo –, que se lee menos. Para realizar la resta de 2 números, se deben colocar los dígitos uno debajo del otro, de manera que tanto las unidades como las decenas, centenas y demás dígitos coincidan en la misma columna, e ir restando de derecha a izquierda. Por ejemplo, para restar 879 – 123, los números se colocarán del siguiente modo:

	8	7	9	Minuendo
–	1	2	3	Sustraendo
	7	5	6	Resta o diferencia

En ocasiones, puede ocurrir que el minuendo sea más pequeño que el sustraendo y que la resta no se pueda realizar. El procedimiento que se debe seguir en estos casos se comprende mejor con un ejemplo:

	8	4	9	Se empieza por restar las unidades: 9 − 3 = 6. Normalmente, se explica que 3 hasta 9 son 6
–	2	6	3	
			6	

	8	14	9	Al restar las decenas, se percibe que no se puede calcular 4 – 6. Por tanto, se ha de pasar una centena a las decenas y calcular 14 – 6 = 8
–	2	6	3	
		8	6	

	8	14	9	La centena que se ha quitado se añade al sustraendo y se restan 8 – 3 = 5. El resultado es 586
–	2 + 1	6	3	
	5	8	6	

Para **comprobar** si una resta está bien calculada, se usa la siguiente propiedad: Minuendo = Sustraendo + Diferencia.

Como ejemplo, se puede comprobar si la resta anterior está bien hecha:

	2	6	3	Sustraendo
+	5	8	6	Diferencia
	8	4	9	Resta o diferencia

La **multiplicación** o producto se define como la suma del mismo número repetidas veces. Se expresa con el símbolo x o con ·, que se leen por. Una multiplicación sencilla sería:

	2	3	4	Factor
x			2	Factor
	4	6	8	Producto

Y significa que 234 · 2 = 234 + 234 = 468.

El procedimiento que se debe seguir para calcular la multiplicación de un número por 2 cifras se explicará con el siguiente ejemplo: 1244 · 21.

		1	2	4	4	Se empieza por multiplicar 1244 · 1 = 1244
	x			2	1	
		1	2	4	4	

		1	2	4	4	Después se multiplica 1244 · 2 = 2488 y el resultado se coloca un lugar más a la izquierda respecto al resultado anterior
	x			2	1	
		1	2	4	4	
	2	4	8	8		

		1	2	4	4	Se suman las 2 multiplicaciones y el resultado final es 26 124
	×			2	1	
		1	2	4	4	
+	2	4	8	8		
	2	6	1	2	4	

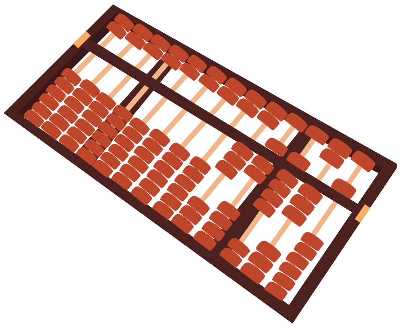
En la multiplicación, también se da el caso de tener que llevar la cifra de las decenas cuando el resultado es igual a 10 o superior. Por ejemplo, al multiplicar 259 · 36.

		3	5		Se empieza por multiplicar 259 · 6. Como 6 · 9 es igual a 54, se ponen 4 y se llevan 5. Después, se multiplican 6 · 5 y al resultado se le suma el 5 que se había llevado antes. Así, 6 · 5 = 30 y 30 + 5 = 35. Por tanto, se ponen 5 y se llevan 3. Para terminar, se calcula 6 · 2 = 12 + 3 = 15
		2	5	9	
×			3	6	
	1	5	5	4	

		1	2		Después se multiplican 259 · 3 = 777 y el resultado se coloca un lugar más a la izquierda que el resultado anterior. Como 3 · 9 = 27, se pone el 7 y se llevan 2. Se multiplican 3 · 5 y al resultado se le suma el 2 que se llevó antes. Así, 3 · 5 = 15 y 15 + 2 = 17. Por tanto, se ponen 7 y se lleva 1. Después se calcula 3 · 2 + 1 = 7
		2	5	9	
×			3	6	
	1	5	5	4	
	7	7	7		

		1	2		Se suma el resultado de las 2 multiplicaciones y el producto es 9324
		2	5	9	
×			3	6	
	1	5	5	4	
+	7	7	7		
	9	3	2	4	

¿Sabías que...?



El ábaco permite, mediante el desplazamiento de sus cuentas, efectuar operaciones aritméticas sencillas (sumas, restas y multiplicaciones).

Vocabulario

Factor: cada uno de los números que intervienen en una multiplicación.

Ejemplo

Si un refresco cuesta 2 euros, el coste de 5 refrescos se calculará así:
2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 2 · 5 = 10.

Ejemplo

El número 101 es un factor especial en ciertas multiplicaciones ya que da estos curiosos resultados.

101 x 11 = 1111
101 x 22 = 2222
101 x 33 = 3333
101 x 44 = 4444
101 x 55 = 5555
101 x 66 = 6666
101 x 77 = 7777
101 x 88 = 8888
101 x 99 = 9999

Cuando se multiplican 2 números que terminan en 0, se hace sin tener en cuenta los ceros y después se añaden al producto tantos como tengan los 2 factores. Por ejemplo, 25 · 20 = 500 o 300 · 40 = 12 000.

¿Y qué ocurre cuando uno de los factores tiene un dígito cero que no está situado en el extremo derecho? Se explicará con un ejemplo: 3423 · 305.

				2	1	1		Se empieza por multiplicar 3423 · 5 = 17 115
				3	4	2	3	
		x			3	0	5	
			1	7	1	1	5	

				1				La siguiente multiplicación sería 3423 · 0 = 0. Por tanto, se pasa a la multiplicación de 3423 · 3 = 10 269 y se saltan 2 lugares a la hora de poner el resultado
				3	4	2	3	
x					3	0	5	
			1	7	1	1	5	
	1	0	2	6	9			

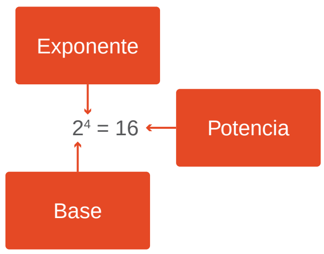
				1				Se suma el resultado de las multiplicaciones y el producto final es 1 044 015
				3	4	2	3	
x					3	0	5	
			1	7	1	1	5	
	1	0	2	6	9			
	1	0	4	4	0	1	5	

¿Sabías que...?

Las potencias de 2 están bastante presentes en nuestro alrededor:

- Los miembros de nuestra familia crecen de acuerdo con este tipo de potencias.
- La reproducción celular también se realiza de acuerdo a esta ley.
- El número de cortes que damos a un papel y el número de trozos que obtenemos.

Cuando los factores son iguales se da un caso especial de multiplicación: las potencias. Por ejemplo, si se quiere calcular 2 · 2 · 2 · 2 = 16, se puede expresar de la siguiente forma:



Los elementos de una potencia son los siguientes: $\text{Base}^{\text{Exponente}}$ = Potencia. La base es el factor que se quiere multiplicar (en el ejemplo la base es 2) y el exponente es el número de veces que se repite el factor, en este caso 4. La potencia es el resultado de la multiplicación (16). Este ejemplo se lee 2 elevado a la cuarta.

A continuación se detallarán otros ejemplos:

- 3^2 = 3 · 3 = 9. Se lee 3 elevado al cuadrado. Coloquialmente, se lee 3 al cuadrado.
- 5^3 = 5 · 5 · 5 = 125. Se lee 5 elevado al cubo o 5 al cubo.
- 2^6 = 2 · 2 · 2 · 2 · 2 · 2 = 64. Se lee 2 elevado a la sexta o 2 a la sexta.

Ejemplo

Existen también pirámides con potencias como esta que se incluye a continuación.

1^2 = 1
11^2 = 121
111^2 = 12 321
$11\,11^2$ = 1 234 321
$111\,11^2$ = 123 454 321
$1\,111\,11^2$ = 12 345 654 321
$11\,111\,11^2$ = 1 234 567 654 321
$111\,111\,11^2$ = 123 456 787 654 321
$1\,111\,111\,11^2$ = 12 345 678 987 654 321

La **división** surge de la necesidad de poder hacer repartos. Se expresa con el símbolo :, que se lee dividido por o dividido entre. Esta división se escribe de la siguiente forma:

Dividendo (D)	12	3	Divisor (d)
Resto (r)	0	4	Cociente (c)

Se considera que esta división es exacta porque el resto es 0, mientras que si el resto fuese distinto de 0, se afirmaría que la división es entera. Por ejemplo:

16 | 3 1 5	3 · 5 = 15 En este caso, para obtener el resto de la división se calcula 16 – 15 = 1

También existe un algoritmo para realizar divisiones, como se explicará con el siguiente ejemplo:

856 | 4 0 2	Se divide la primera cifra del dividendo entre 4 (8 : 4 = 2) y se resta 8 – 8 = 0, dígito que corresponde al resto
856 | 4 05 2	Se baja la siguiente cifra y se pone al lado del resto, es decir, del 0
856 | 4 05 21 1	Se divide 5 : 4 = 1 y se calcula el resto multiplicando 4 · 1 = 4. De 4 hasta 5 va 1
856 | 4 05 21 16	Se baja la última cifra, que es el 6, y se pone al lado del 1
856 | 4 05 214 16 0	Se divide 16 : 4 = 4 y, como esta división es exacta, el resto es 0. El resultado final es 214 y la división es exacta

Otro ejemplo servirá para explicar cómo se hace una división con un divisor de 2 cifras:

14 356 | 23 5 6	Se empezará por dividir las 2 primeras cifras del dividendo entre las 2 cifras que tiene el divisor (14 : 23). Esta división no se puede hacer, así que se seleccionarán 3 cifras y se calculará 143 : 23 = 6 y el resto (23 · 6 = 138 = 143 − 138 = 5)
14 356 | 23 55 6	Se baja la cifra siguiente y se pone al lado del resto
14 356 | 23 55 62 9	Se divide 55 : 23 = 2 y se calcula el resto multiplicando 23 · 2 = 46. De 46 hasta 55 van 9
14 356 | 23 55 62 96	Se baja la última cifra, que es el 6, y se pone al lado del 9
14 356 | 23 55 624 96 4	Se divide 96 : 23 = 4 y se calcula el resto: 23 · 4 = 92. De 92 a 96 van 4. El resultado es 624 y es una división entera porque el resto final es 4

Ejemplo

Si se tienen 12 euros y se reparten entre 3 personas, habría que dividir 12 : 3 = 4 para calcular cuánto dinero le correspondería a cada persona. Por tanto, a cada persona le corresponderán 4 euros. Para saber que el resultado de la división es 4 se debe buscar el mayor número posible, de manera que al multiplicarlo por 3 se obtenga un número menor o igual a 12, pero nunca mayor.

Vocabulario

Algoritmo: pasos o instrucciones que se han de seguir para la realización de una determinada operación o actividad.

Consulta

Además de la prueba de la división, existe otro cálculo sencillo llamado la prueba del nueve que sirve para verificar si una operación tiene un resultado correcto. El resultado de esta prueba tiene un margen de error del 10 % por lo que no es algo en lo que se pueda confiar ciegamente.

Busca más información sobre este artificio matemático y realiza alguna prueba de las propuestas en la siguiente página web: http://bit.ly/1AXVqmp.

En una división siempre se cumple la siguiente propiedad: D = d · c + r. Se llama prueba de la división y se utiliza para comprobar que la operación se ha realizado correctamente. Así, con ella se puede saber si la división anterior está bien realizada:

$$
\begin{array}{rccccc}
 & & & 6 & 2 & 4 \\
\times & & & & 2 & 3 \\
\hline
 & & 1 & 8 & 7 & 2 \\
+ & 1 & 2 & 4 & 8 & \\
\hline
 & 1 & 4 & 3 & 5 & 2
\end{array}
$$

Como 14 352 + 4 es igual a 14 356, se comprueba que la división está bien hecha. Se explicará con un ejemplo qué ocurre si el dividendo es menor que el divisor:

32 524 | 18 14 1	Se empezará por dividir las dos primeras cifras del dividendo entre las dos cifras que tiene el divisor, 32 : 18 = 1; y se calculará el resto: 18 · 1 = 18 y 32 − 18 = 14
32 524 | 18 14 5 1	Se baja la siguiente cifra y se pone al lado del resto
32 524 | 18 14 5 1	Se divide 145 : 18 = 8 y se calcula el resto: 18 · 8 = 144 y 145 − 144 = 1
32 524 | 18 14 5 18 1 2	Se baja el 2 y se pone al lado del 1
32 524 | 18 14 5 18 12	Como no se puede dividir 12 entre 18, se expresa cero al cociente y se baja la cifra siguiente
32 524 | 18 14 5 1806 1 24 16	Se divide 124 : 18 = 6 y se calcula el resto de la siguiente forma: 18 · 6 = 108 y 124 – 108 = 16. Por tanto, el resultado de la división es 1806, con resto igual a 16

1.4. Divisibilidad de números naturales

Una vez estudiadas las operaciones con números naturales, y concretamente la división, se puede explicar la **divisibilidad** de los números naturales.

1.4.1. Múltiplos y divisores de un número. Uso de los criterios de divisibilidad

¿Sabías que...?

Si quieres comprobar tus cuentas puedes entrar en el siguiente enlace, donde encontrarás un calculadora online de divisiones: http://bit.ly/1r6qIaM.

Se considera que un número (d) es divisible por otro (a) cuando al realizar la división (d : a), esta es exacta, o lo que es lo mismo, tiene resto 0. En este caso, se considera que d es un múltiplo de a y que a es un divisor de d. Es decir, un número es múltiplo de otro si el primero resulta de multiplicar el segundo por cualquier otro número natural distinto de 0; y un número es divisor de otro si, al dividir el segundo número entre el primero, la división es exacta.

Por ejemplo, 6 es divisible por 2, ya que 6 entre 2 es igual 3. Sin embargo, 6 no es divisible por 4, ya que la división de 6 entre 4 no es exacta. En el ejemplo, 6 es un múltiplo de 2 y 2 es un divisor de 6. A continuación se explicarán algunos ejemplos más:

Para comprobar si 38 múltiplo de 5, se hará esta división:

$$\begin{array}{r|l} 38 & 5 \\ \hline 3 & 7 \end{array}$$

Como el resto de la división es 3 y no 0, se puede asegurar que 38 no es múltiplo de 5.

Para comprobar si 9 es divisor de 297 también se hará la división correspondiente:

$$\begin{array}{r|l} 297 & 9 \\ \hline 27 & 33 \\ 0 & \end{array}$$

Como la división es exacta, se puede afirmar que 9 es divisor de 297. Así pues, 297 es divisible por 9.

Para calcular los **divisores** de un número (a), hay que dividir dicho número entre todos aquellos menores que él, incluido él mismo. Se elegirán como divisores todos aquellos números cuya división haya sido exacta y se expresará como div(a).

Para calcular un **múltiplo** de un número (d), basta con multiplicar d por cualquier número natural. Así, se puede comprobar que el conjunto de múltiplos de un número no es finito, mientras que el conjunto de los divisores sí lo es. El conjunto de los múltiplos del número natural d se expresará: $\dot{d}$.

Existen unos **criterios de divisibilidad** que pueden simplificar los cálculos en muchas situaciones:

- **Divisibilidad por 2:** un número es divisible por 2 si la cifra que corresponde a las unidades es 0 o múltiplo de 2. Por ejemplo, 4332 es divisible por 2, pero 567 no lo es.
- **Divisibilidad por 3:** un número es divisible por 3 si la suma de todas sus cifras es múltiplo de 3. Por ejemplo, 5205 es divisible por 3, ya que $5 + 2 + 0 + 5 = 12$ y 12 es múltiplo de 3.
- **Divisibilidad por 4:** un número es divisible por 4 si el número formado por las decenas y las unidades (las 2 últimas cifras) es divisible por 4. Por ejemplo, 1316 es divisible por 4 al serlo 16; sin embargo, 805 no es divisible por 4, ya que 5 no lo es.
- **Divisibilidad por 5:** un número es divisible por 5 si la cifra de las unidades es 0 o 5. Por ejemplo, 4570 o 655 son divisibles por 5.
- **Divisibilidad por 9:** un número es divisible por 9 si la suma de todas sus cifras es múltiplo de 9. Por ejemplo, 53 415 es divisible por 3 ya que $5 + 3 + 4 + 1 + 5 = 18$ y 18 es múltiplo de 9.
- **Divisibilidad por 10:** un número es divisible por 10 si su última cifra es 0. Por ejemplo, 220 o 1450 son divisibles por 10.
- **Divisibilidad por 11:** un número es divisible por 11 si la diferencia entre la suma de las cifras que ocupan un lugar par y la suma de las cifras que ocupan un lugar impar es 0 o múltiplo de 11. Por ejemplo, 9372 es divisible por 11 ya que $(9 + 7) - (3 + 2) = 11$.

Ejemplo

A continuación, se calcularán los divisores de 8:

$$\begin{array}{r|l} 8 & 1 \\ \hline 0 & 8 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 8 & 2 \\ \hline 0 & 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 8 & 3 \\ \hline 2 & 2 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 8 & 4 \\ \hline 0 & 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 8 & 5 \\ \hline 3 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 8 & 6 \\ \hline 2 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 8 & 7 \\ \hline 1 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 8 & 8 \\ \hline 0 & 1 \end{array}$$

Así, los divisores de 8 son 1, 2, 4 y 8 y dicho conjunto se escribe div(8) = {1, 2, 4, 8}.

Ejemplo

Los múltiplos de 5 se expresan de la siguiente forma:

$\dot{5}$ = {5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75…}.

Importante

Todos los números tienen como mínimo 2 divisores, el 1 y él mismo. Por ejemplo, el número 2 o el 3, entre otros. Los números que cumplen esto se llaman primos.

Importante

No todos los números primos son impares. Existe uno que no lo es, el 2.

1.4.2. Números primos. Números compuestos. Descomposición de números en factores primos

Se considera que un número natural mayor que 1 es **primo** si sus únicos divisores son 1 y él mismo. Por ejemplo, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 y 19, entre otros, son números primos.

Para comprobar si un número natural es primo, se dividirá dicho número por la serie de números primos (2, 3, 5, 7, 11…), hasta que se llegue a una división en la que el cociente sea menor o igual que el divisor. Si todas esas divisiones son inexactas, el número dado es primo. Por ejemplo, para averiguar si 101 es un número primo se harán las siguientes divisiones:

$$\begin{array}{r|l} 101 & 2 \\ \hline 01 & 50 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 101 & 3 \\ \hline 11 & 33 \\ 2 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 101 & 5 \\ \hline 01 & 20 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 101 & 7 \\ \hline 31 & 14 \\ 3 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 101 & 11 \\ \hline 02 & 9 \end{array}$$

Al realizar la división de 101 por 11 se obtiene como cociente 9 y resto 2. Al ser el cociente menor que el divisor, ya no es necesario continuar con las divisiones y se puede concluir que 101 es un número primo.

Los números que no son primos se denominan **compuestos.** Estos últimos se pueden expresar de forma única como producto de números primos. Es lo que se conoce como descomposición de un número en factores primos.

El procedimiento que se debe seguir para **descomponer un número en factores primos,** tomando como ejemplo 12, es el siguiente:

1.° Se probará a dividir 12 entre 2, que es el número primo más pequeño. Si la división es exacta, se continuará con el proceso, y si no es exacta, se probará con el siguiente número primo, que es el 3. Como 12 : 2 = 6, se seguirá con el proceso. Se expresa así:

$$\begin{array}{r|l} 12 & 2 \\ 6 & \end{array}$$

2.° Se probará a dividir 6 entre 2. Si la división es exacta, se continuará con el proceso, y si no es exacta, se probará con el siguiente número primo, que es el 3. Como 6 : 2 = 3, se seguirá con el proceso. Se expresa así:

$$\begin{array}{r|l} 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & \end{array}$$

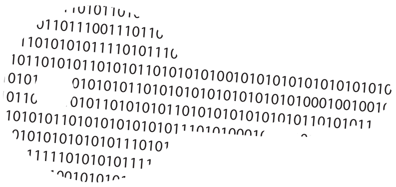
3.° Como 3 no es múltiplo de 2, se probará a hacer la división entre 3. Como el resultado de la división (3 : 3) es 1, el proceso termina aquí y quedaría:

$$\begin{array}{r|l} 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

Así, se puede afirmar que la descomposición factorial de 12 es $12 = 2^2 \cdot 3$.

Consulta

Existen proyectos a día de hoy que se dedican a seguir buscando números primos. El uso de estos números tiene una gran importancia en ámbitos como el de la criptografía. En el siguiente enlace puede ampliar información sobre este tema: http://bit.ly/1vD6zEL.



Una manera de ahorrar cálculos en una descomposición factorial es hacer las divisiones en cadena. Como ejemplo, a continuación se explica el cálculo de la descomposición en factores primos de 36:

$$\begin{array}{rrrrr}
36 & |\underline{\;2\;} & & & \\
16 & 18 & |\underline{\;2\;} & & \\
0 & 0 & 9 & |\underline{\;3\;} & \\
 & & 0 & 3 & |\underline{\;3\;} \\
 & & & 0 & 1
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r|l}
36 & 2 \\
18 & 2 \\
9 & 3 \\
3 & 3 \\
1 &
\end{array}$$

Por tanto, $36 = 2^2 \cdot 3^2$.

También se pueden calcular los divisores de un número mediante su descomposición factorial, al combinar todos los factores que aparecen en la descomposición. A continuación, se explicará cómo calcular los divisores de 12 con los 2 métodos existentes:

En primer lugar, se pueden hacer las divisiones correspondientes:

$$\begin{array}{r|l} 12 & \underline{\;1\;\;} \\ 0 & 12 \end{array}\qquad
\begin{array}{r|l} 12 & \underline{\;2\;\;} \\ 0 & 6 \end{array}\qquad
\begin{array}{r|l} 12 & \underline{\;3\;\;} \\ 0 & 4 \end{array}\qquad
\begin{array}{r|l} 12 & \underline{\;4\;\;} \\ 0 & 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 12 & \underline{\;5\;\;} \\ 2 & 2 \end{array}\qquad
\begin{array}{r|l} 12 & \underline{\;6\;\;} \\ 0 & 2 \end{array}\qquad
\begin{array}{r|l} 12 & \underline{\;7\;\;} \\ 5 & 1 \end{array}\qquad
\begin{array}{r|l} 12 & \underline{\;8\;\;} \\ 4 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 12 & \underline{\;9\;\;} \\ 3 & 1 \end{array}\qquad
\begin{array}{r|l} 12 & \underline{\;10\;} \\ 2 & 1 \end{array}\qquad
\begin{array}{r|l} 12 & \underline{\;11\;} \\ 1 & 1 \end{array}\qquad
\begin{array}{r|l} 12 & \underline{\;12\;} \\ 0 & 1 \end{array}$$

Así, los divisores de 12 son: div(12) = {1, 2, 3, 4, 6, 12}.

En segundo lugar, se puede considerar su descomposición factorial:

$$\begin{array}{r|l}
12 & 2 \\
6 & 2 \\
3 & 3 \\
1 &
\end{array}$$

Sus divisores son 1, 2, 3. $2 \cdot 2 = 4$, $2 \cdot 3 = 6$ y $2^2 \cdot 3 = 12$.

1.4.3. Cálculo de múltiplos y divisores comunes a varios números

Existen números que tienen **múltiplos y divisores comunes.** Se puede comprobar calculando los múltiplos y divisores de 4 y 6, por ejemplo:

En el caso de los múltiplos, $\dot{4}$ = {4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, 44, 48…} y $\dot{6}$ = {6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, 60, 66, 72…}. Por lo tanto, sus múltiplos comunes son 12, 24, 36 y 48, entre otros.

En el caso de los divisores, div(4) = {1, 2, 4} y div(6) = {1, 2, 3, 6}. Por lo tanto, sus divisores comunes son 1 y 2.

¿Sabías que...?

Eratóstenes, un matemático griego, desarrolló un algoritmo para hallar todos los números primos menores a un número natural dado. Este proceso se denomina la criba de Eratóstenes.

Consulta

Puedes comprobar las descomposiciones en factores primos que hagas en el siguiente enlace: http://bit.ly/1rcjvWO.

1.4.4. Máximo común divisor (m.c.d.) y mínimo común múltiplo (m.c.m.): procedimientos de cálculo

Una vez estudiados los múltiplos y divisores de un número, el concepto de número primo y el procedimiento de descomposición de números en factores primos, es el momento de introducir 2 nuevos términos: el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo. Estos conjuntos de operaciones permiten resolver numerosos problemas matemáticos y facilitan el trabajo al operar, por ejemplo, con fracciones.

Tanto el primero como el segundo, se pueden calcular por dos caminos distintos, de manera que se puede comprobar que el resultado obtenido mediante una de las dos formas es correcto.

Consulta

La mejor manera de asimilar el proceso de cálculo del m.c.d. y el m.c.m. es mediante la realización de ejercicios. Puedes encontrar unos cuantos en la siguiente página web: http://bit.ly/13WV0mh.

El **máximo común divisor** (m.c.d.) de 2 o más números naturales se define como el mayor de todos los divisores comunes a dichos números.

El máximo común divisor se puede obtener mediante 2 métodos diferentes. Por un lado, se pueden calcular los divisores de los números en cuestión y, de todos los divisores comunes, escoger el de mayor valor. Como ejemplo, a continuación se calculará el m.c.d. de 12 y 18:

1.° Los divisores de 12 y de 18 son div(12) = {1, 2, 3, 4, 6, 12} y div(18) = {1, 2, 3, 6, 9,18}.

2.° Los divisores comunes a ambos son 2, 3 y 6.

3.° Como se debe escoger el máximo, se dirá que el m.c.d. es 6 y se escribe m.c.d. (12, 18) = 6.

Por otro lado, se pueden descomponer los números dados en factores primos. Una vez hecha la descomposición, se elegirán los factores primos comunes a todos los números, elevados a su menor exponente. Como ejemplo, se calculará el m.c.d. de 20 y 8:

1.° Se descomponen los números 20 y 8 en factores primos:

$$\begin{array}{r|l} 20 & 2 \\ 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array}$$

2.° Como $20 = 2^2 \cdot 5$ y $8 = 2^3$, se puede afirmar que el m.c.d. es 4, es decir, m.c.d. (20, 8) = 4.

El **mínimo común múltiplo** (m.c.m.) de 2 o más números naturales se define como el menor de todos los múltiplos comunes a dichos números.

El mínimo común múltiplo también se puede obtener mediante 2 métodos diferentes. Por un lado, se pueden calcular los múltiplos de los números en cuestión hasta que se encuentre el primer múltiplo común a dichos números. Como ejemplo, a continuación se calculará el m.c.m. de 5 y 12:

1.° Se calculan los múltiplos de 5 y de 12. $\dot{5}$ = {5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75…} y 12 = {12, 24, 36, 48, 60, 72…}.

2.° Como el primer múltiplo en común es 60, se puede considerar que este es el m.c.m. y se escribirá del siguiente modo: m.c.m. (5, 12) = 60.

Por otro lado, se pueden descomponer los números dados en factores primos y, una vez hecha la descomposición, escoger los factores primos comunes y no comunes elevados a su mayor exponente. Se puede entender mejor con el cálculo del m.c.m. de 6 y 9:

1.° Se descomponen los números 6 y 9 en factores primos:

$$\begin{array}{r|l} 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

2.° Como $6 = 2 \cdot 3$ y $9 = 3^2$, se puede considerar que el m.c.m. de 6 y 9 es igual a $2 \cdot 3^2 = 18$. Se escribirá: m.c.m. $(6, 9) = 2 \cdot 3^2 = 18$.

Cuando el máximo común divisor de 2 números es 1, se considera que dichos números son primos entre sí. Por ejemplo, 4 y 5 son primos entre sí, ya que, si se realiza la descomposición factorial de ambos números, se comprueba que no tienen ningún factor primo en común:

$$\begin{array}{r|l} 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

Así, $4 = 2^2$ y $5 = 5$. Por tanto, el m.c.d. de 4 y 5 es 1: m.c.d. $(4, 5) = 1$. Además, también se cumple que el mínimo común múltiplo de estos 2 números es el producto de ambos: m.c.m. $(4, 5) = 2^2 \cdot 5 = 4 \cdot 5 = 20$.

Hay un caso particular en el cálculo del m.c.d. y del m.c.m., que se da cuando uno de los números es múltiplo del otro. Si esto ocurre, el cálculo se simplifica de una manera considerable, puesto que el máximo común divisor coincide con el menor de los números y el mínimo común múltiplo coincide con el mayor. Se puede comprobar si se calcula, por ejemplo, el m.c.d. y el m.c.m. de 6 y 12.

$$\begin{array}{r|l} 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

Así, $6 = 2 \cdot 3$ y $12 = 2^2 \cdot 3$. Por tanto, el m.c.d. $(6, 12) = 2 \cdot 3 = 6$ y el m.c.m. $(6, 12) = 2^2 \cdot 3 = 12$.

Importante

El m.c.d. y el m.c.m. no parece que tengan demasiado valor en sí mismos pero son la llave para solucionar determinados ejercicios y facilitan enormemente el trabajo con fracciones.

1.4.5. Aplicaciones de la divisibilidad y uso del m.c.d. y del m.c.m. en la resolución de problemas asociados a situaciones cotidianas

Numerosos **problemas de la vida cotidiana** se resuelven mediante **aplicaciones de la divisibilidad** y el cálculo del m.c.d. y del m.c.m.

Por ejemplo, Eva ha preparado 66 bocadillos para su fiesta de cumpleaños, a la que acuden 11 personas. Si todos los invitados comen el mismo número de bocadillos, ¿cuántos bocadillos comerá cada uno? ¿Sobrará alguno?

Primero se comprueba si 66 es divisible por 11. Según el criterio de divisibilidad por 11, se ha de restar $6 - 6 = 0$. Como el resultado es 0, se puede considerar que 66 es divisible por 11. Después, se divide 66 : 11.

$$\begin{array}{r|l} 66 & 11 \\ \cline{2-2} 00 & 6 \end{array}$$

Por tanto, cada invitado comerá 6 bocadillos y no sobrará ninguno.

Rafael reparte sus ahorros entre sus tres hijos. Si la cantidad a repartir es de 3046 euros, ¿se puede repartir este dinero sin que sobre nada?

Para resolver este problema, se ha de saber si el número 3046 es divisible por 3. Para ello se pueden usar dos métodos. En primer lugar, se pueden aplicar los criterios de divisibilidad: para saber si 3046 es divisible por 3, se suman las cifras de este número, 3 + 0 + 4 + 6 = 13. Como 13 no es múltiplo de 3, se concluye que no se puede repartir el dinero sin que sobre nada. Y, en segundo lugar, se puede dividir 3046 : 3.

3046	3
004	1015
16	
1	

Como la división no es exacta, no se puede repartir el dinero sin que sobre nada. Según el resultado obtenido, cada hijo recibirá 1015 € y sobrará 1 €.

Sergio tiene una bolsa con 60 canicas verdes y otra con 75 canicas azules. Quiere hacer paquetes con canicas del mismo color, de forma que en todos los paquetes haya el mismo número de canicas. ¿Cuántos paquetes habrá de cada color si quiere que entren el mayor número posible de canicas en cada uno?

Para resolver este problema, se ha de calcular el máximo común divisor de 60 y 75.

60	2
30	2
15	3
5	5
1	

75	3
25	5
5	5
1	

Como $75 = 3 \cdot 5^2$ y $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$, el m.c.d. será $3 \cdot 5 = 15$. Así, cada paquete tendrá 15 canicas.

Para saber cuántos paquetes habrá de cada color se han de hacer 2 divisiones: 60 : 15 = 4 y 75 : 15 = 5. Por tanto, habrá 4 paquetes de canicas verdes y 5 paquetes de canicas azules.

Hugo e Iker viajan en tren a Madrid. Hugo lo hace cada 20 días e Iker lo hace cada 30. ¿Cada cuántos días coincidirán en el tren? Si la última vez que coincidieron fue el 22 de septiembre, ¿cuándo volverán a coincidir?

Para resolver este problema, se ha de calcular el mínimo común múltiplo de 20 y 30.

20	2
10	2
5	5
1	

30	2
15	3
5	5
1	

Como $20 = 2^2 \cdot 5$ y $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$, el m.c.m. será $2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$. Por tanto, coinciden en el tren cada 60 días.

Ahora bien, si la última vez que coincidieron fue el 22 de septiembre, basta con contar 60 días para saber cuándo volverán a coincidir. Así pues, coincidirán el 21 de noviembre (8 días de septiembre, 31 de octubre y 21 de noviembre). Es decir, 8 + 31 + 21 = 60.

1.5. Números enteros

Una vez estudiados los números naturales, se debe introducir el concepto de número entero. En algunas ocasiones, se ve en la calle un termómetro que marca –4 °C o un ascensor con las teclas –1 y –2. Cuando un número lleva un signo menos delante, su significado cambia y se afirma que es negativo.

De este modo, el conjunto de los **números enteros** está formado por los números negativos, el 0 y los números positivos o naturales, que se han estudiado ya en el apartado 1.3. Números naturales: …, –5, –4, –3, –2, –1, 0, +1, +2, +3, +4, +5…

Al igual que se hizo con los números naturales, ahora se explicarán los números enteros y sus operaciones..

Consulta

Los cuadrados mágicos son tablas que contienen números enteros. Su principal característica es que la suma de los números por filas, columnas y diagonales da siempre el mismo resultado.

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Infórmate sobre ellos y sus variantes en Internet.

1.5.1. Representación y comparación de números enteros

El conjunto de los números enteros se expresa con una Z. El uso de esta letra se debe a que la palabra número en alemán se escribe *zahlen*. Por tanto, el conjunto de los números enteros se escribe:

$$Z = \{\ldots -3, -2, -1, +0, +1, +2, +3\ldots\}$$

Dentro de este conjunto se pueden distinguir 3 subconjuntos: el de los números enteros negativos, que son los que llevan el signo – delante ($Z^- = \{\ldots -5, -4, -3, -2, -1\}$), el número 0 y el subconjunto de los números enteros positivos o naturales, que se pueden escribir con el signo + delante o directamente sin ningún signo: $Z^+ = \{+1, +2, +3, +4, +5\ldots\} = \{1, 2, 3, 4, 5\ldots\}$.

Vocabulario

Subconjunto: conjunto que está incluido en otro mayor que este.

Al igual que los números naturales, los números enteros pueden representarse en una recta de la siguiente forma:

Los números enteros negativos se encuentran a la izquierda del 0 y los enteros positivos a la derecha. Es decir, el 0 separa los números negativos de los positivos.

Un concepto que aparece al introducir los números negativos es el de valor absoluto. El valor absoluto de un número entero es el número natural que resulta de eliminar el signo de dicho número y se representa con 2 barras. Por ejemplo $|-3| = 3$ y $|+6| = 6$.

Importante

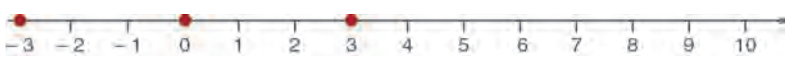
No es imprescindible poner el signo + en los números enteros positivos, ya que cuando un número no lleva ningún signo se sobreentiende que es positivo. Por ejemplo, +4 = 4.

El criterio de comparación de números enteros es el mismo que se explicó para los números naturales. Así, dados 2 números enteros, el mayor será el que esté situado más hacia la derecha en la recta de los números enteros, y viceversa, el menor será el que esté situado más hacia la izquierda. Por ejemplo, $4 > -2$, $-9 < 6$, $-5 < -2$ y $0 > -3$.

Se define el opuesto de un número como aquel que tiene el mismo valor absoluto que este, pero distinto signo. Se expresa con Op(a), siendo a un número entero dado. Por ejemplo:

$$Op(-7) = 7 \qquad y \qquad Op(6) = -6$$

Estos números cumplen la propiedad de que se encuentran a la misma distancia del 0. Por ejemplo:



1.5.2. Aplicación de la regla de los signos en la multiplicación

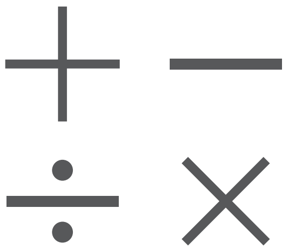
Para realizar la multiplicación de 2 números enteros, se debe tener en cuenta la **regla de los signos en la multiplicación:**

+ · + = +	− · + = −
+ · − = −	− · − = +

En el siguiente apartado se estudiará cómo aplicar esta regla.

Importante

Las operaciones básicas con números enteros son de gran utilidad en el día a día de las personas y representan la base sobre la que desarrollar ideas matemáticas más complejas.



1.5.3. Operaciones básicas con números enteros

Para realizar las operaciones básicas con números enteros hay que tener especial cuidado con el signo negativo que tienen. De este modo, para sumar 2 números enteros, primero se debe comprobar si ambos tienen el mismo signo. Cuando es así, se suman dichos números y el resultado tendrá el mismo signo que los sumandos:

(+3) + (+5) = +8	5 + 7 = 12	(–4) + (–6) = –10

Se puede observar que si se suman 2 números positivos el resultado es positivo y, si se suman 2 números negativos, el resultado es negativo.

En cambio, si los signos son distintos, se restarán los 2 números (el de mayor valor absoluto menos el de menor valor absoluto) y el signo del resultado será el que tenga el número de mayor valor absoluto.

(–13) + (+5) = –8	(+15) + (–6) = +9

Por definición, la **resta** se realiza sumando al minuendo el opuesto del sustraendo. Por ejemplo:

(+3) – (+5) = (+3) + (–5) = –2	(–4) – (+6) = (–4) + (–6) = –10
(+4) – (–2) = (+4) + (+2) = 6	(–5) – (–8) = (–5) + (+8) = 3
(–3) – (+6) = (–3) + (–6) = –9	(+12) – (–5) = (+12) + (+5) = 17

La resta se puede simplificar si, en lugar de sumar al minuendo el opuesto del sustraendo, se eliminan los paréntesis utilizando la regla de los signos para la multiplicación. Es decir:

+ (+a) = +a	– (+a) = –a
– (–a) = +a	+ (–a) = –a

En la siguiente tabla, se explicará cómo realizar el ejemplo anterior siguiendo esta regla:

(+3) – (+5) = 3 – 5 = –2	(–4) – (+6) = –4 – 6 = –10
(+4) – (–2) = 4 + 2 = 6	(–5) – (–8) = –5 + 8 = 3
(–3) – (+6) = –3 – 6 = –9	(+12) – (–5) = 12 + 5 = 17

Se pueden restar y sumar varios números a la vez. Por ejemplo, –4 + 5 – 7 + 2 + + 4 – 10. En este caso, la forma más sencilla de operar es agrupar por un lado los números positivos y por otro lado los negativos, es decir, –4 + 5 – 7 + 2 + 4 – 10 = = 11 – 21 = –10.

Como se estudió en el apartado 1.5.2. Aplicación de la regla de los signos en la multiplicación, para realizar una **multiplicación,** se ha de tener en cuenta también esta regla. Primero, se realiza la multiplicación de los números y, sucesivamente, se aplica la regla de los signos.

3 · 5 = 15	(–4) · 6 = –24	5 · (–4) · 2 = –40
4 · (–2) = –8	(–5) · (–8) = 40	(–6) · 3 · (–3) = 54
(–3) · 6= –18	12 · (–5) = –60	(–2) · (–5) · (–9) = –90

Para hacer una de división de 2 números enteros, también se sigue la regla de los signos en la división.

+ : + = +	− : + = −
+ : − = −	− : − = +

Así, para realizar la división, primero se dividen los 2 números y después se aplica la regla de los signos.

30 : 5 = 6	(–24) : 6 = –4	(–40) : 2 = –20
(–18) : 6 = –3	(–12) : (–2) = 6	(–45) : (–9) = 5

1.5.4. Necesidad de los números negativos para expresar estados y cambios. Reconocimiento y conceptualización en contextos reales

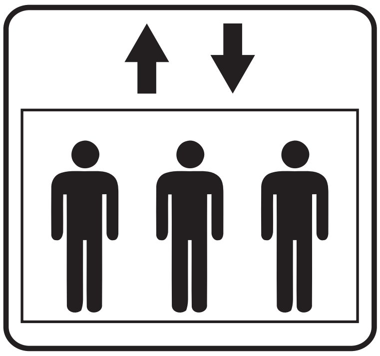
Si se asegura que la temperatura es de 3 °C bajo cero, que se está en la planta 2 del sótano, que un submarino está a 200 metros por debajo del nivel del mar o que Arquímedes nació en el año 287 a. de C., ¿cómo se expresarían estas afirmaciones en lenguaje matemático? La respuesta sería –3 °C, planta –2, –200 m y año –287.

Así pues, los números enteros surgen de la **necesidad** de expresar cantidades negativas, ya que para escribir todas estas expresiones no son suficientes los números naturales. Así, por ejemplo, en el caso de estar en la planta 2 del sótano, se tomará como referencia la planta baja o planta 0. Las plantas que estén encima de esta se denotarán con números positivos y las que estén debajo con números negativos.

Ejemplo

Si Marta se encuentra en la planta –3 de un centro comercial y ha subido en ascensor hasta la planta 2, ¿Cuántas plantas ha subido? Para resolver este problema, se ha de restar 2 – (–3) = 2 + 3 = 5. Por lo tanto, ha subido 5 plantas.

Esta mañana la temperatura era de –2 °C y ahora es de 10 °C. ¿Cuántos grados centígrados ha aumentado la temperatura? También hay que restar, 10 – (–2) = 10 + 2 = 12. La solución es que la temperatura ha aumentado 12 °C.



1.5.5. Utilización de la jerarquía y propiedades de las operaciones y de las reglas de uso de los paréntesis en cálculos sencillos

Algunas de las operaciones básicas que se llevan a cabo con números naturales y números enteros cumplen una serie de **propiedades.**

Así, la suma cumple varias. En primer lugar está la propiedad conmutativa, que indica que para cualquier par de números enteros (a y b), se cumple que a + + b = b + a. Es decir, –2 + 5 = 5 + (–2) = 3. Y en segundo lugar está la propiedad asociativa, que indica que, dados 3 números enteros (a, b y c), se cumple que (a + b) + c = a + (b + c). Esto significa que se pueden sumar 2 de los números y al resultado sumarle el tercero. Por ejemplo, (–4 + 7) + 9 = –4 + (7 + 9) = 12.

Además, existe un elemento neutro para la suma de números enteros. Se trata del número que se debe sumar a otro para que el resultado sea el mismo. En este caso se trata del 0, ya que a + 0 = a. Por ejemplo, –2 + 0 = –2. También existe el elemento opuesto de un número entero (a), que ya se explicó que es –a, y que verifica que a + (–a) = 0. Por ejemplo, 3 + (–3) = 0.

Por su parte, la multiplicación verifica otra serie de propiedades. Entre ellas está la propiedad conmutativa, que responde al dicho de que el orden de los factores no altera el producto. Es decir, dados 2 números naturales (a y b), se cumple que a · b = b · a. Con lo que 4 · 6 = 6 · 4 = 24.

También se cumple la propiedad asociativa, que indica que, dados 3 números naturales (a, b y c), se cumple que (a · b) · c = a · (b · c). Por ejemplo, (–5 · 6) · 4 = = –5 · (6 · 4) = –30 · 4 = –5 · 24 = 120. También se aplica la denominada propiedad distributiva del producto con respecto a la suma o la resta, que indica que, si se consideran 3 números naturales (a, b y c), se verifica que a · (b + c) = a · b + a · c y que a · (b – c) = a · b – a · c. Un ejemplo puede ser 7 · (22 + 9) = 7 · 22 + 7 · 9 = = 7 · 31 = 154 + 63 = 217.

Importante

En ocasiones, es necesario resolver a la vez varias operaciones con números enteros. A este tipo de operaciones se las denomina operaciones combinadas. Para realizarlas, se usa la **jerarquía** de las operaciones, que indica la prioridad con la que se deben hacer.

Asimismo, existe el elemento neutro para la multiplicación, denominado también elemento unidad, que es el número que se debe multiplicar por otro para que el resultado sea el mismo. En este caso es el 1, ya que a · 1 = a. Por ejemplo, 35 · 1 = 35.

El orden de los pasos a seguir es el siguiente: en primer lugar los **paréntesis** y corchetes, en segundo lugar las multiplicaciones y divisiones y en tercer lugar las sumas y restas.

A continuación se detallan varios ejemplos. Los subrayados indican las operaciones que se han de realizar primero en cada paso, teniendo en cuenta la jerarquía de las operaciones.

$12 \underline{- 4 \cdot 5} = 12 - 20 = -8$	$\underline{24 : 6 - 5 \cdot 4} + 12 = 4 - 20 + 12 = 16 - 20 = -4$
$(\underline{9 - 3}) - (\underline{2 + 4}) = 6 - 6 = 0$	$-2 \cdot (\underline{4 - 1}) + (\underline{3 \cdot 5} - 6) : 3 = \underline{-2 \cdot 3} + (\underline{15 - 6}) : 3 =$ $= -6 + \underline{9 : 3} = -6 + 3 = -3$

1.5.6. Utilización de la calculadora para operar con números enteros

Lo primero que se debe saber a la hora de usar una calculadora es cómo encenderla y apagarla. La tecla correspondiente al encendido de la calculadora es **AC** y la que se usa para apagarla es **OFF.**

Para realizar las 4 operaciones básicas con números enteros se usan las siguientes teclas: +, –, × y ÷, que corresponden, respectivamente, a la suma, la resta, la multiplicación y la división. Si se quiere introducir en la calculadora un número entero negativo, se debe usar la tecla +/–. Otros modelos de calculadora pueden tener la tecla de cambio de signo (–).

Una tecla imprescindible en la calculadora es la que corresponde al igual. Cuando se pulsa, se ordena a la calculadora que muestre el resultado de la operación. Esta tecla es =.

Como ejemplo, a continuación se verá cómo calcular –34 + 48:

1.° Se pulsa la tecla +/– y después se teclea el número 34.

2.° Se pulsa la tecla +, que corresponde a la suma, y a continuación se teclea el número 48.

3.° Se pulsa la tecla del igual e inmediatamente aparecerá el resultado.

4.° El resultado de la operación es 14.

Es importante resaltar que, dependiendo de la calculadora, la tecla +/– puede tener que pulsarse después de haber tecleado el número.

1.6. Fracciones y decimales en entornos cotidianos

El uso de números **decimales** en entornos cotidianos es muy habitual. Por ejemplo, los precios de los productos que se compran en el supermercado o el precio de la gasolina se expresan con decimales. Así, el precio de un kilo de naranjas puede ser de 0,65 € y un billete de autobús puede costar 1,15 €. El euro se puede expresar como máximo con 2 cifras decimales, ya que un euro corresponde a 100 céntimos. Sin embargo, el precio de la gasolina se expresa con 3 decimales y puede ser, por ejemplo, 1,378 €.

También se usan muchas expresiones del tipo 3 cuartos de hora, un cuarto de kilo, medio bocadillo o un tercio de un pastel. En ellas, se están usando **fracciones:** 3/4 de hora, 1/4 de kilo, 1/2 bocadillo o 1/3 de un pastel.

En los siguientes apartados se estudiarán los números decimales y las fracciones, así como las operaciones que se pueden realizar con dichos números.

1.6.1. Decimales en entornos cotidianos. Operaciones con números decimales

Los **decimales** son números que están formados por 2 partes diferenciadas: la parte entera y la decimal. Ambas están separadas por el decimal, que se suele expresar con una coma, bien en la parte inferior, bien en la superior.

Por ejemplo, en el número 25,367, la parte entera es 25 y la parte decimal es 367. Asimismo, en 0,45, la parte entera es 0 y la decimal es 45.

Parte entera		
Centenas	Decenas	Unidades
100 U	10 U	1 U

Decimal
,

Parte decimal		
Décimas	Centésimas	Milésimas
0,1 U	0,01 U	0,001 U

Al igual que se vio en el apartado de los números naturales, la parte entera se puede descomponer en unidades, decenas y centenas, que se empiezan a nombrar de derecha a izquierda. Además, la parte decimal se puede descomponer en décimas, centésimas y milésimas. En este caso, se nombran de izquierda a derecha. Las décimas corresponden a la décima parte de la unidad, es decir: 1 décima = 1/10 U = 0,1 U. Las centésimas corresponden a la centésima parte de la unidad, es decir: 1 centésima = 1/100 U = 0,01 U. Y las milésimas corresponden a la milésima parte de la unidad, es decir: 1 milésima = 1/1000 U = 0,001 U.

Por ejemplo, la descomposición de 25,367 sería: 2 D + 5 U + 3 décimas + 6 centésimas + 7 milésimas. O lo que es lo mismo: 20 U + 5 U + 0,3 U + 0,06 U + 0,007 U. Asimismo, la descomposición de 0,45 sería 0,45 = 0 U + 4 décimas + 5 centésimas. Es decir, 0,4 U + 0,05 U.

Para comparar 2 números decimales, se empieza por las partes enteras de dichos números. Pueden darse 2 casos. Por un lado, será mayor el número cuya parte entera sea mayor. Por ejemplo, 32,5 > 30,42. Y, por otro lado, si las partes enteras son iguales, se compararán las partes decimales y se empezará por las décimas. Por ejemplo, 4,5 > 4,02. Si las décimas también coincidieran, se mirarían las centésimas y así sucesivamente. Por ejemplo, 16,27 > 16,22.

A veces puede resultar más fácil la comparación de 2 números decimales si se añaden ceros a la derecha de la parte decimal. Por ejemplo, para comparar 4,15 y 4,1, se afirma que 4,15 > 4,10 y, si se quiere comparar 3,21 y 3, se afirma que 3,21 > 3,00.

Las **operaciones con decimales** se realizan como las operaciones con números naturales, pero hay que tener en cuenta el decimal. Estas operaciones también cumplen las propiedades que se explicaron en el apartado 1.5.5. Utilización de la jerarquía y propiedades de las operaciones y de las reglas de uso de los paréntesis en cálculos sencillos.

Para sumar 2 números decimales, se colocarán uno debajo del otro, de manera que coincidan las comas del decimal unas debajo de las otras y así hacer coincidir las unidades, decenas y centenas, así como las décimas, centésimas y milésimas. Por ejemplo:

$$\begin{array}{r} 23{,}4 \\ +\ \ 6{,}2 \\ \hline 29{,}6 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 306{,}27 \\ +\ 152{,}3 \\ \hline 458{,}57 \end{array}$$

En el caso de que en la suma aparezca algún número entero, se le añadirá la coma y se completarán con ceros tantos decimales como sean necesarios. Se puede ver en la siguiente suma: 4375 + 27,9 + 0,21.

$$\begin{array}{r} 4375{,}00 \\ 27{,}9 \\ +\ \ \ 0{,}21 \\ \hline 4403{,}11 \end{array}$$

La resta se realiza igual que con números naturales pero, como en la suma, hay que tener en cuenta que las comas han de coincidir unas encima de las otras.

$$\begin{array}{r} 8{,}9 \\ -\ 1{,}3 \\ \hline 7{,}6 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 16{,}54 \\ -\ \ 3{,}1 \\ \hline 13{,}44 \end{array}$$

También se pueden hacer restas de números enteros y números decimales, para lo que se añadirán ceros en la parte decimal. A continuación se detallan 2 ejemplos: 56,94 – 23 y 80 – 12,7.

$$\begin{array}{r} 56{,}94 \\ -\ 23{,}00 \\ \hline 33{,}94 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 80{,}0 \\ -\ 12{,}7 \\ \hline 67{,}3 \end{array}$$

En la multiplicación de números decimales, se distinguen 2 casos. Cuando se multiplica un número decimal por un número entero, se realiza la multiplicación como si se tratase de 2 números naturales.

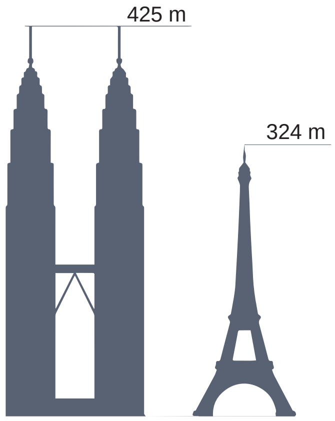
El resultado obtenido tendrá tantos decimales como tiene el número decimal implicado en la operación. Se entenderá mejor al operar 23,56 · 3.

$\begin{array}{r} 2356 \\ \times\ \ \ \ 3 \\ \hline 7068 \end{array}$	Se multiplican 2356 · 3
$\begin{array}{r} 23{,}56 \\ \times\ \ \ \ \ 3 \\ \hline 70{,}68 \end{array}$	Como el factor 23,56 tiene 2 decimales, el resultado de la multiplicación tendrá 2 decimales también, así que el resultado de multiplicar 23,56 por 3 es 70,68

En cambio, si los 2 factores de la multiplicación son números decimales, el resultado tendrá tantos decimales como la suma de los decimales de los 2 factores. Se puede comprobar al calcular 4,38 · 2,1.

¿Sabías que...?

La altura de las torres Petronas es aproximadamente 1,4 veces la de la torre Eiffel. Se podría expresar la proporción entre estas dos construcciones con más exactitud, si se emplease un número con más decimales.



Torres Petronas Torre Eiffel

4 3 8 x 2 1 4 3 8 + 8 7 6 9 1 9 8	Se multiplica 438 · 21
4, 3 8 x 2, 1 4 3 8 + 8 7 6 9, 1 9 8	Como el factor 4,38 tiene 2 decimales y el factor 2,1 tiene 1, la multiplicación tendrá 3 decimales, así que el resultado de multiplicar 4,38 por 2,1 es 9,198

En la división de números decimales se distinguen 3 casos. Si el dividendo y el divisor son enteros y la división no es exacta, se pueden añadir ceros al dividendo para obtener decimales en el cociente. Se puede comprobar, por ejemplo, en la división de 137 : 4.

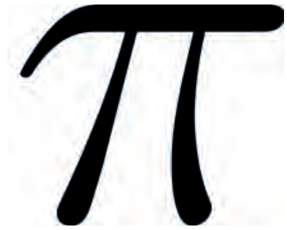
137 | 4 17 34 1	Se hace la división 137 : 4
1370 | 4 17 34, 1	Como el resto es 1, se añade un 0 en el dividendo. Al añadir el 0, se pone el decimal (,) en el cociente
1370 | 4 17 34,2 10 2	Se baja el 0 y se sigue dividiendo
13 700 | 4 1 7 34,25 10 20 0	Como ahora el resto es 2, se añade otro 0 en el dividendo y se sigue operando. Al haber obtenido el resto 0, la división se ha terminado y, por tanto, es igual a 34,25

Si el dividendo es un número decimal y el divisor es un número entero, se realiza la división como si se tratase de 2 números naturales y, cuando se baje la cifra siguiente al decimal, este se pondrá en el cociente. Para comprobarlo, se puede calcular 25,8 : 5.

90,3 | 4,2	Antes de comenzar con la división, se debe quitar el decimal del divisor. Como 4,2 tiene una cifra decimal, se multiplican el dividendo y el divisor por 10. Así, 90,3 · 10 = 903 y 4,2 · 10 = 42
903 | 42 63 21 21	Después, se divide 903 : 42
9030 | 42 63 21,5 210 00	Como el resto es 21, se añade un 0 en el dividendo y el decimal en el cociente. El resultado obtenido es 21,5

Consulta

De entre los infinitos números decimales que existen, algunos son especialmente conocidos por alguna utilidad concreta como el número pi, el número e y el número áureo.



Busca información sobre estos tres números y sus características.

Consulta

Además de facilitar las operaciones de multiplicación y división el cero es un número que tiene una gran utilidad en el ámbito matemático. Puedes consultar una serie de curiosidades acerca de este número en el siguiente enlace: http://bit.ly/16M1CVZ

Unas operaciones que se harán en muchas ocasiones en la siguiente unidad didáctica son la multiplicación y división por una unidad seguida de ceros. En el caso de la multiplicación, se distinguen 2 casos. Si el primer factor es un número entero, se añaden tantos ceros como tenga el otro factor. Por ejemplo:

12 · 10 = 120	350 · 1000 = 350 000

Pero si el primer factor es un número decimal, se moverá la coma del decimal hacia la derecha tantos lugares como ceros tenga el otro factor. Por ejemplo:

3,42 · 100 = 342	0,67 · 1000 = 670

Para la división también se distinguen 2 casos. Si el dividendo tiene tantos ceros o más que el divisor, se tacharán tanto ceros del dividendo como ceros tiene la unidad. Por ejemplo:

120 : 10 = 12	450 000 : 1000 = 450

Y si el dividendo no tiene ceros o no tiene tantos como el divisor, se moverá la coma del decimal hacia la izquierda tantos lugares como ceros tenga el otro factor. Por ejemplo:

128 : 100 = 1,28	560 : 100 = 5,60
320,73 : 10 = 32,073	2,6 : 100 = 0,026

Algunos ejemplos del uso de decimales en entornos cotidianos pueden ser los siguientes: Carlos pesa 54,3 kilos y Elena pesa 53,8. ¿Quién pesa más? ¿Qué diferencia hay entre los pesos? Como 54,3 > 53,8, Carlos es el que más pesa. Para calcular la diferencia entre los pesos se ha de restar:

$$\begin{array}{rrrr} & 5 & 4, & 3 \\ - & 5 & 3, & 8 \\ \hline & 0 & 0, & 5 \end{array}$$

Por tanto, la diferencia de pesos es de 0,5 kilos.

Víctor camina todos los días dando la vuelta a un parque cuya longitud es de 1,25 kilómetros. Si da 3 vueltas, ¿cuántos kilómetros camina cada día? ¿Y a la semana? Para saber los kilómetros que camina cada día, se multiplica 1,25 · 3:

$$\begin{array}{rrrr} & 1, & 2 & 5 \\ \times & & & 3 \\ \hline & 3, & 7 & 5 \end{array}$$

Para calcular los kilómetros que camina a la semana se multiplica 3,75 · 7:

$$\begin{array}{rrrrr} & & 3, & 7 & 5 \\ \times & & & & 7 \\ \hline & 2 & 6, & 2 & 5 \end{array}$$

Es decir, cada día camina 3,75 kilómetros y cada semana 26,25.

Sergio ha pagado 2,6 € por la compra de 4 bolígrafos. ¿Cuánto cuesta cada bolígrafo? Para saber el precio de cada bolígrafo, se ha de dividir 2,6 : 4:

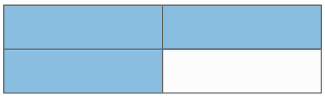
$$\begin{array}{r|l} 2{,}6 & 4 \\ \cline{2-2} 20 & 0{,}65 \\ 0 & \end{array}$$

Por tanto, cada bolígrafo cuesta 0,65 €.

1.6.2. Significados y usos de las fracciones en la vida real

Una **fracción** se forma al dividir una unidad en un número determinado de partes y tomar una cierta cantidad de dichas partes.

Por ejemplo, 3 cuartos significa que una unidad se divide en 4 partes y se toman 3 de ellas. Esto se suele representar gráficamente de la siguiente forma:



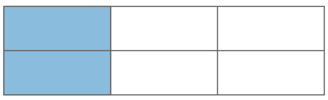
Esta fracción se escribe 3/4

El número 3 se llama numerador y el 4 denominador

También se puede escribir 3/4

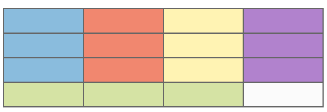
Se considera que 3/4 es una fracción propia, porque es menor que la unidad, mientras que una fracción del tipo 9/8 es impropia, porque es mayor que la unidad.

Si Pablo se ha comido las 2 sextas partes de una tarta y quiere expresar en fracción la parte de tarta que se ha comido, ¿qué fracción de tarta le ha sobrado? Si se dibuja la fracción que ha comido, inmediatamente se verá la fracción de tarta que ha sobrado:



Se ha comido 2/6 de la tarta y le han sobrado 4/6

Otro ejemplo podría ser el de cinco amigos que se reúnen en una pizzería y deciden pedir dos pizzas para cenar. Si vienen divididas en ocho porciones, ¿cuántas porciones le corresponderán a cada uno? ¿Sobra alguna porción? ¿Qué fracción representa sobre el total?



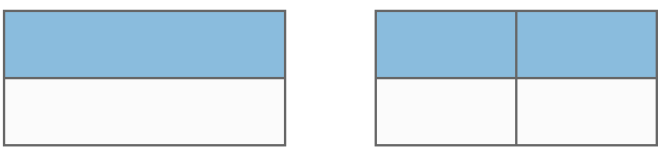
A cada amigo le corresponden 3 porciones, es decir, comerá 3/16 del total

Y sobra una porción, que representa 1/16 del total

Las fracciones también pueden ser negativas, por ejemplo 4/–3 o –1/5.

1.6.3. Fracciones equivalentes. Simplificación y amplificación de fracciones; identificación y obtención de fracciones equivalentes

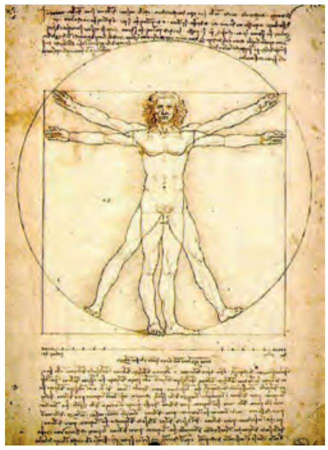
Se puede decir que 2 fracciones son equivalentes cuando representan la misma parte de la unidad. Por ejemplo:



La primera fracción es 1/2 y la segunda es 2/4. Se puede observar que la parte coloreada en ambos cuadrados es la misma. Esta representación gráfica demuestra la equivalencia entre las dos fracciones.

¿Sabías que...?

El hombre de Vitruvio de Leonardo da Vinci utiliza fracciones para expresar las proporciones anatómicas. El rostro, por ejemplo, mide una décima parte de la altura del cuerpo.



Vocabulario

Numerador: parte superior de una fracción.

Denominador: parte inferior de una fracción.

Ejemplo

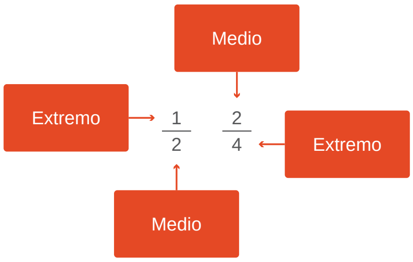
Si se quiere encontrar una fracción equivalente a 2/3 por amplificación, se multiplicarán el numerador y el denominador por 2 y quedará 4/6.

Esta es la forma gráfica de representar un par de fracciones equivalentes, pero es necesario saber los procedimientos para poder comprobarlo mediante operaciones matemáticas.

> **Ejemplo**
>
> Para encontrar una fracción equivalente a 2/4 por simplificación, la única división que se puede hacer es con el 2, quedando otra fracción, 1/2, equivalente a la dada, ya que los divisores comunes de 2 y 4 son 1 y 2.

Se puede comprobar si 2 fracciones son equivalentes sin necesidad de dibujarlas de 2 formas diferentes. En primer lugar, al dividir el numerador entre el denominador de ambas fracciones. Si el resultado de las 2 divisiones es el mismo, las fracciones son equivalentes. En el ejemplo anterior se cumple, porque 1 : 2 = 0,5 y 2 : 4 = 0,5.

Y en segundo lugar, al usar una propiedad fundamental que indica que, cuando 2 fracciones son equivalentes, el producto de los medios es igual al producto resultante de los extremos.



2 · 2 = 4 y 1 · 4 = 4, con lo que las fracciones son equivalentes, como ya se pudo comprobar antes

Cuando dos fracciones son equivalentes se escribe 1/2 = 2/4.

Se pueden obtener fracciones equivalentes a una dada por amplificación o por simplificación. Para obtener una fracción equivalente a otra por **amplificación,** se multiplican el numerador y el denominador por cualquier número entero distinto de 0 y de 1, usando el mismo número en ambas multiplicaciones.

Se pueden obtener tantas fracciones equivalentes por amplificación como se desee, ya que se pueden multiplicar por el número entero que se quiera.

Para obtener una fracción equivalente a otra por **simplificación,** se dividen el numerador y el denominador por el mismo número entero, siendo dicho número un divisor común a ambos distinto de 1. Con la simplificación no se pueden obtener todas las fracciones que se quiera, ya que solo se pueden dividir entre los divisores comunes al numerador y el denominador.

> **Ejemplo**
>
> La fracción irreductible de 48/120 es la siguiente:
>
> $$\frac{48}{120} \underset{:2}{=} \frac{24}{60} \underset{:2}{=} \frac{12}{30} \underset{:2}{=} \frac{6}{15} \underset{:3}{=} \frac{2}{5}$$

Un concepto importante cuando se trabaja con fracciones es el de fracción irreducible. Una fracción irreducible es aquella cuyos numerador y denominador son primos entre sí. Se obtiene mediante la simplificación sucesiva de una fracción, hasta que se llega a una que ya no se puede simplificar más.

1.6.4. Reducción de fracciones a común denominador. Comparación de fracciones

Para **comparar** 2 o más fracciones se usan 3 criterios. En primer lugar, si las fracciones tienen el mismo denominador, es mayor la que mayor numerador tenga. Por ejemplo:

$$\frac{8}{10} > \frac{5}{10} > \frac{1}{10}$$

En segundo lugar, si las fracciones tienen el mismo numerador, es mayor la que menor denominador tenga. Por ejemplo:

$$\frac{7}{2} > \frac{7}{4} > \frac{7}{9}$$